Zadanie nr.1 z zestawu drugiego. Rozwiązywali w pocie czoła Sławomir Wolf i Grzegorz Szuba.

Zadanie : obliczyć granice (zbadać granice) w zależności od parametru α .
Rozwiązanie :
1. Rozważmy kilka przypadków : w szczególności rozważmy przypadek szczególny, gdy α <0:
Wtedy :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^{-|\alpha|}} = \lim_{x\to 0} x^{|\alpha|}[\ln(1+x)-e^x+1]$$

z czego momentalnie widać, iż wyrażanie ma $\lim_{x\to 0}$ = 0.

2. dla α =0 otrzymujemy $\lim_{x\to 0}$ = 0 – korzystamy tutaj z faktu, iż $\lim_{x\to 0} x^0$ = 1 więc na podstawie powyższego mamy 1*0 = 0.

Na podstawie dwóch powyższych punktów mamy, że dla $\alpha \le 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^\alpha} = 0$$

3.Rozważmy następnie przedział gdzie $\alpha \in \left]0,1\right]$. Wtedy :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^\alpha} \overset{[\frac{0}{0}]H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0.$$

Korzystamy tutaj z faktu, że dla $\alpha \in \left]0,1\right]$ α -1<0 wiec wyrażenie to możemy zapisać :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{\alpha x^{-|\alpha-1|}} = \lim_{x\to 0} x^{|\alpha-1|}\left(\frac{1}{1+x}-e^x\right) = 0$$

Przedział jest domknięty, gdyż dla α =1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{1} = 0$$

(po prostych przekształceniach).

4.Rozważmy przedział gdzie $\alpha \in \left]1,2\right]$. Wtedy :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^\alpha} \overset{[\frac{0}{0}]H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} \overset{[\frac{0}{0}]H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = -1$$

Analogicznie rozważamy następne przypadki, by w rezultacie otrzymać, iż dla α >2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^\alpha} = -\infty$$

WSKAZÓWKI pomocne przy rozwiązywaniu zadań tego typu:
1. uważać w czasie obliczania granic, gdy potęga jest ujemna lub pierwiastkowa.