Opracowanie: Iwona Ryszka, Danuta Szewczyk

Zadanie 1

A

$A_t = \{x \in R : -(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5\}$

a) $t \in R$

(a1) połączenie zbiorów $\bigcup_{t \in R} A_t = R$

(a2) przecięcie zbiorów $\bigcap_{t \in R} A_t =]\,0, \frac{15}{8}\,[$

b) $t \in N$

(b1) połączenie zbiorów $\bigcup_{t \in N} A_t = R$

(b2) przecięcie zbiorów $\bigcap_{t \in N} A_t =]\,-1,2\,[$

Udowodnimy teraz przykład a) dla $t \in R$

$(a1)$

$$\bigcup_{t \in R} A_t = R$$

$$x \in \bigcup_{t \in R} A_t \Leftrightarrow x \in R$$

$$1^0 \quad x \in \bigcup_{t \in R} A_t \Rightarrow x \in R \qquad \wedge \qquad 2^0 \quad x \in R \Rightarrow x \in \bigcup_{t \in R} A_t$$

$Ad.1^0$

$$\forall_{t \in R} A_t \subset R \Rightarrow \bigcup_{t \in R} A_t \subset R$$

zatem

$$x \in \bigcup_{t \in R} A_t \Rightarrow x \in R$$

$Ad.2^0$

$$Z: -\infty < x < \infty$$

$$T: \exists_{t \in R} -(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \inf\limits_{t \in R} -(t+1)^2 = \lim\limits_{t \to \infty} -(t+1)^2 = -\infty \Rightarrow \forall_{x \in R} \exists_{t_1 \in R} \forall_{t > t_1} -(t+1)^2 < x \\ \sup\limits_{t \in R} 2t^2 - 5t + 5 = \lim\limits_{t \to \infty} 2t^2 - 5t + 5 = \infty \Rightarrow \forall_{x \in R} \exists_{t_2 \in R} \forall_{t > t_2} 2t^2 - 5t + 5 > x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$dla\ t \ge \max\{t_1, t_2\}: \quad -(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5 \quad \Rightarrow \quad \underset{t\in R}{\exists} \ x \in \ A_t$$

$(a2)$

$$\bigcap_{t\in R} A_t =]\,0, \frac{15}{8}\,[$$

$$x \in \bigcap_{t\in R} A_t \iff x \in]\,0, \frac{15}{8}\,[$$

$$1^0 \quad x \in \bigcap_{t\in R} A_t \Rightarrow x \in]\,0, \frac{15}{8}\,[\qquad \wedge \quad 2^0 \quad x \in]\,0, \frac{15}{8}\,[\ \Rightarrow x \in \bigcap_{t\in R} A_t$$

$Ad.1^0$

$$x \in \bigcap_{t\in R} A_t \iff \underset{t\in R}{\forall} \ x \in A_t \iff \underset{t\in R}{\forall} \ -(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5$$

$$Z: \ \underset{t\in R}{\forall} \ -(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5$$

$$T: \ x \in]\,0, \frac{15}{8}\,[$$

z założenia dla $t \in R$

$$-(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5 \quad \iff \begin{cases} x > -(t+1)^2 \\ x < 2t^2 - 5t + 5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{t\in R}{\forall} \left.\begin{array}{l} x > -(t+1)^2 \\ \max[-(t+1)^2] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x > \max[-(t+1)^2] \iff x > 0 \\ \underset{t\in R}{\forall} \left.\begin{array}{l} x < 2t^2 - 5t + 5 \\ \min[2t^2 - 5t + 5] = \frac{15}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow x < \min[2t^2 - 5t + 5] \iff x < \frac{15}{8} \end{array}\right\} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{15}{8} \end{cases} \iff x \in]\,0, \frac{15}{8}\,[\quad c.n.u.$$

$Ad.2^0$

$$Z: \ x \in]\,0, \frac{15}{8}\,[$$

$$T: \ \underset{t\in R}{\forall} \ -(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5$$

z założenia dla $t \in R$

$$x \in]\,0, \frac{15}{8}\,[\quad \iff \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{15}{8} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x>0\\ \max[-(t+1)^2]=0\end{array}\right\} x>\max[-(t+1)^2] \Rightarrow \underset{t\in R}{\forall}\, x>-(t+1)^2\\ \left.\begin{array}{l}x<\dfrac{15}{8}\\ \min[2t^2-5t+5]=\dfrac{15}{8}\end{array}\right\} x<\min[2t^2-5t+5] \Rightarrow \underset{t\in R}{\forall}\, x<2t^2-5t+5\end{array}\right\} \Leftrightarrow \underset{t\in R}{\forall}\ -(t+1)^2<x<2t^2-5t+5 \quad c.n.u.$$

Analogicznie dowodzi się przykład b) gdzie $t\in N$

B

$B_n=\left\{x\in R:\ a\le x<b+\dfrac{1}{n}\right\}$, gdzie $n\in N$

(1) Przecięcie rodziny zbiorów: $\bigcap_{n\in N} B_n=[a,b]$

(2) Połączenie rodziny zbiorów: $\bigcup_{n\in N} B_n=[a,b+1[$

DOWÓD:
W dowodzie wykorzystujemy następujący fakt:

$$\begin{array}{ccccc} A=B & \Leftrightarrow & A\subset B & \wedge & B\subset A\\ & & \Updownarrow & & \Updownarrow\\ & & \text{i.}\ \ \underset{x}{\forall}[x\in A\Rightarrow x\in B] & & \text{ii.}\ \ \underset{x}{\forall}[x\in B\Rightarrow x\in A]\end{array}$$

(1) Przecięcie rodziny zbiorów: $\bigcap_{n\in N} B_n=[a,b]$

i. $\quad x\in\bigcap_{n\in N} B_n \Leftrightarrow \underset{n\in N}{\forall} x\in B_n \Leftrightarrow \underset{n\in N}{\forall} a\le x<b+\dfrac{1}{n} \overset{?}{\Rightarrow} x\in[a,b]$

Z: $\quad a\le x<b+\dfrac{1}{n}$

T: $\quad x\in[a,b]$

$$\underset{n\in N}{\forall}\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad x\ge a\\ x<b+\dfrac{1}{n} \ \Rightarrow x\le \lim\limits_{n\to\infty}\left(b+\dfrac{1}{n}\right)\Rightarrow x\le b\end{array}\right\} \Rightarrow x\in[a,b]$$

Udowodniono, że $\bigcap_{n\in N} B_n \subset [a,b]$.

ii. $\left(x\in[a,b] \Leftrightarrow a\le x\le b\right) \overset{?}{\Rightarrow} x\in \bigcap_{n\in N} B_n \Leftrightarrow \underset{n\in N}{\forall}\, a\le x< b+\frac{1}{n}$

Z: $x\in[a,b]$

T: $\underset{n\in N}{\forall}\, a\le x< b+\frac{1}{n}$

$$\underset{n\in N}{\forall}\left\{\begin{matrix} x\ge a \\ \inf\limits_{n\in N}\left(b+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b+\frac{1}{n}\right)=b \\ x\le b\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{n\in N}{\forall}\, a\le x< b+\frac{1}{n}$$

Udowodniono, że $[a,b]\subset \bigcap_{n\in N} B_n$.

Na podstawie (i.) oraz (ii.): $\bigcap_{n\in N} B_n = [a,b]$

(2) Połączenie rodziny zbiorów: $\bigcup_{n\in N} B_n = [a,b+1[$

i. $x\in \bigcup_{n\in N} B_n \Leftrightarrow \underset{n\in N}{\exists}\, x\in B_n \Leftrightarrow \underset{n\in N}{\exists}\, a\le x< b+\frac{1}{n} \overset{?}{\Rightarrow} x\in [a, b+1[$

Z: $\underset{n\in N}{\exists}\, a\le x< b+\frac{1}{n}$

T: $x\in [a, b+1[$

1° $x\ge a$ (z założenia)

2° $\left(x<b+\frac{1}{n}\le b+1\right)\Rightarrow x<b+1$

Pokazano, że $\bigcup_{n\in N} B_n \subset [a,b+1[$

ii. $x\in [a, b+1[\overset{?}{\Rightarrow} x\in \bigcup_{n\in N} B_n \Leftrightarrow \underset{n\in N}{\exists}\, x\in B_n \Leftrightarrow \underset{n\in N}{\exists}\, a\le x< b+\frac{1}{n}$

Z: $x\in [a, b+1[$

T: $\underset{n\in N}{\exists}\, a\le x< b+\frac{1}{n}$

1° $x\ge a$ (z założenia)

2° $x<b+1 \overset{?}{\Rightarrow} \underset{n\in N}{\exists}\, x<b+\frac{1}{n}$

dla $n=1 \quad b+\frac{1}{n}=b+1 \quad \Rightarrow \underset{n\in N}{\exists}\left(x<b+1 \Rightarrow x<b+\frac{1}{n}\right)$

Pokazano, że $[a,b+1[\subset \bigcup_{n\in N} B_n$

Na podstawie (i.) oraz (ii.): $\bigcup_{n\in N} B_n = [a,b+1[$