Opracowanie: Iwona Ryszka, Danuta Szewczyk

ZESTAW V

Zad. 1.

Z: $f : R \to R$
T: $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ metryką w R

Dowód:

1° $\forall_{x,y \in R}\ d(x,y) \geq 0$
$|f(x) - f(y)| \geq 0$ z własności wartości bezwzględnej

2° $\forall_{x,y \in R}\ d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |(-1)\cdot(f(x) - f(y))| = |f(y) - f(x)| = d(y,x)$

3° $\forall_{x,y,z \in R}\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
$|f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$

I. $f(x) \geq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \geq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \geq f(z)$
$f(x) - f(z) \leq f(x) - f(y) + f(y) - f(z)$
$0 \leq 0$

II. $f(x) \geq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \geq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \leq f(z)$
$f(x) - f(z) \leq f(x) - f(y) - f(y) + f(z)$
$f(y) \leq f(z)$ co jest zgodne z założeniem

III. $f(x) \geq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \leq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \geq f(z)$
$f(x) - f(z) \leq -f(x) + f(y) + f(y) - f(z)$
$f(x) \leq f(y)$ co jest zgodne z założeniem

IV. $f(x) \geq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \leq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \leq f(z)$ przypadek niemożliwy

V. $f(x) \leq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \geq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \geq f(z)$ przypadek niemożliwy

VI. $f(x) \leq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \geq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \leq f(z)$
$-f(x) + f(z) \leq f(x) - f(y) - f(y) + f(z)$
$f(x) \geq f(y)$ co jest zgodne z założeniem

VII. $f(x) \leq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \leq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \geq f(z)$
$-f(x) + f(z) \leq -f(x) + f(y) + f(y) - f(z)$
$f(y) \geq f(z)$ co jest zgodne z założeniem

VIII. $f(x) \leq f(z) \quad \wedge \quad f(x) \leq f(y) \quad \wedge \quad f(y) \leq f(z)$

$-f(x) + f(z) \leq -f(x) + f(y) - f(y) + f(z)$

$0 \leq 0$

4° $\underset{x,y \in R}{\forall} d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow x = y$

$|f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$ i korzystając z założenia, że f jest iniekcją, to $x = y$

Na podstawie warunków 1°-4° otrzymujemy tezę.