Zestaw VI zad. 1.: Opracował: Piotr Mazur

Niech $f_n :]0,1] \to R$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & dla \quad x \in]0, \frac{1}{2n}] \\ 2n^2(\frac{1}{n} - x) & dla \quad x \in]\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & dla \quad x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

n=1

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 2(1 - x) & dla \quad x \in]\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & dla \quad x \in]1, 1] \end{cases}$$

n=2

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & dla \quad x \in]0, \frac{1}{4}] \\ 8(\frac{1}{2} - x) & dla \quad x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 0 & dla \quad x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

a) badam zbieżność punktową ciągu (f_n) na]0,1]

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{]0,1]} f :\Leftrightarrow \forall_{x\in]0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall_{x\in]0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \forall_{x\in]0,1]} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \ge n_0} f_n(x) = 0$$

Odp. f_n jest zbieżny punktowo na przedziale]0,1] do 0.

b) badam zbieżność jednostajną (f_n) na]0,1]

f_n - jest zbieżny w sensie metryki Czebyszewa

$$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{]0,1]}{\rightrightarrows}} f :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_c(f_n, f) = 0$$

$$d_c(f_n, f) = \sup_{x\in]0,1]} d_c(f_n(x), f(x))$$

$$d_c(f_n, f) = \sup_{x\in]0,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right| = n$$

$$\lim_{n\to\infty} n \neq 0$$

$$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{]0,1]}{\not\rightrightarrows}} f$$

Odp. f_n nie jest zbieżne jednostajnie na przedziale]0,1]

c) porównać $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$ $\quad i \quad$ $\int\limits_0^1 \left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx$

$$\lim_{n\to} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2n}} n\, dx + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 2n^2\left(\frac{1}{n} - x\right) dx + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} 0\, dx =$$

$$\lim_{n\to\infty} (nx)\Big|_0^{\frac{1}{2n}} + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (2n - 2n^2 x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{2n} - n0\right) + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 2ndx - \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 2n^2 xdx =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} (2nx - n^2x^2)\Big|_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\left[\left(2n\cdot\frac{1}{n} - n^2\cdot\frac{1}{n^2}\right) - \left(2n\cdot\frac{1}{2n} - n^2\cdot\frac{1}{4n^2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\forall_{x\in]0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \;\Rightarrow\; \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = 0$$

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \neq \lim_{n\to} \int_0^1 f_n(x)dx$$