Zestaw 2 zadanie 2

Zbadać zbieżność ciągu rekurencyjnego u_n w zależności od wartości $a \in R$, jeżeli:

a) $u_0 = a,\ \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \qquad \mathrm{n} = 1,2,3....$

b) $u_0 = a,\ \ u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2u_n + 2,\ \ \mathrm{n} = 1,2,3....$

w jednym przypadku (nietrywialnym) udowodnić.

Wskazówki do a)
jeśli ciąg jest ograniczony i malejący to istnieje jego granica.

Wskazówki do b)
jeśli ciąg jest ograniczony i malejący to istnieje jego granica.

Rozwiązanie a)

Założenie: $a \neq 0$

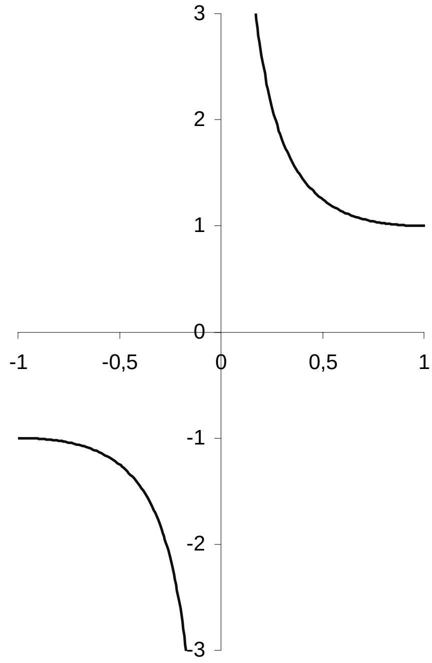
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(-u_n + \frac{1}{u_n}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(-u_n + \frac{1}{u_n}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$u_n^{\ 2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$u_n \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

Więc dla u_n z tego przedziału ciąg jest malejący.

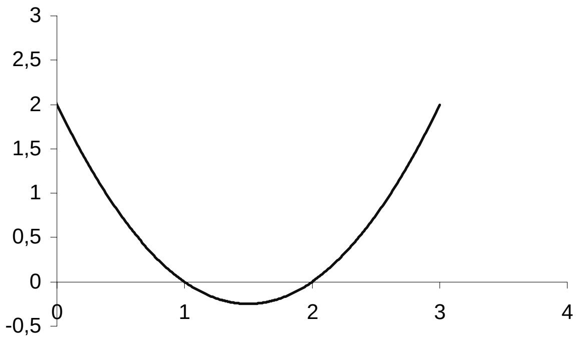


$$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

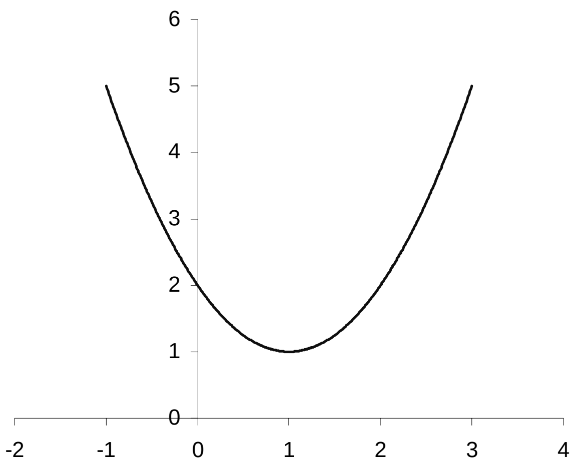
Aby $u_{n+1}\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\quad u_n\in R\setminus 0$
gdy $a\in\{-1,1\}\quad u_n=1$
Czyli dla $a\in R\setminus 0$ ciąg jest zbieżny.

Rozwiązanie b)

$$u_{n+1}-u_n=u_n{}^2-3u_n+2$$



Gdy $u_n\in]1,2[$ ciąg jest malejący.



$$y=x^2-2x+2$$

Aby $u_{n+1}\in]1,2[\quad u_n\in]0,2[$

Czyli dla $a \in]0,2[$ ciąg jest zbieżny.
Gdy $a = 0 \vee a = 2$:
$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$
ostatecznie:
Dla $a \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ ciąg jest rozbieżny.
Dla $a \in [0,2]$ ciąg jest zbieżny.

Dowiodę indukcyjnie dla $a \in [0,2]$:
I
$u_1 \in]1,2[$
$u_2 \in]1,2[$
II
$u_n \in]1,2[\overset{?}{\Rightarrow} u_{n+1} \in]1,2[$
powyższa nierówność jest prawdą, ponieważ u_n jest malejący i ograniczony z dołu przez 1:
$\forall_{x\in R}\ x^2 - 2x + 2 > 1,$
c.b.d.u.