Opracowanie: Wojciech Marszałek

Zadanie 2
Zestaw 6

2. Niech $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ dla $x \in I = [0,1]$

a) zbadać zbieżność punktową ciągu (f_n) na I

b) porównać $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$ $\quad i \quad$ $\int\limits_0^1 \left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx$

co można powiedzieć o zbieżności jednostajnej (f_n) na I

c) określić obszary zbieżności jednostajnej (f_n)

a)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n x}{2^n(\frac{1}{2^n}+nx^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{2^n}+nx^2} = 0$, dla każdego $x \in I$,

czyli $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ jest zbieżna punktowo dla każdego $x \in I$,

b)

$$\int f_n(x)dx = \int \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \frac{1}{2n}\int \frac{2n2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \frac{1}{2n}\ln(1+n2^n x^2)+C$$

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \left[\frac{1}{2n}\ln(1+n2^n x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2n}\ln(1+n2^n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n2^n}(2^n+n2^n\ln 2)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n2^n\ln 2}{2+2n2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+n\ln 2}{\frac{2}{2^n}+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\ln 2}{\frac{2}{n2^n}+2} = \frac{\ln 2}{2}$$

$\int\limits_0^1 \left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]dx = \int\limits_0^1 [0]dx = [0]_0^1 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx \neq \int\limits_0^1 \left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]dx$, stąd na podstawie twierdzenia $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ nie jest zbieżna jednostajnie na I

c)

$(f_n(x))' = \left(\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}\right)' = \dfrac{2^n(1+n2^n x^2) - 2nx^2 2^{2n}}{(1+n2^n x^2)^2}$, ekstremum funkcji może istnieć tylko gdy:

$2^n(1+n2^n x^2)-2nx^2 2^{2n}=0,$

$2^n+n2^{2n}x^2-2nx^2 2^{2n}=0/:2^n,$

$1-nx^2 2^n=0,$

$nx^2 2^n=1,$

$x^2=\frac{1}{n2^n},$

$x=\sqrt{\frac{1}{n2^n}} \vee x=-\sqrt{\frac{1}{n2^n}}$

tylko pierwsze rozwiązanie mieści się w I

$x=\sqrt{\frac{1}{n2^n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$f_n(\frac{1}{\sqrt{n2^n}})=\frac{2^n\frac{1}{\sqrt{n2^n}}}{1+n2^n\frac{1}{n2^n}}=\frac{\sqrt{\frac{2^n}{n}}}{2}=\sqrt{\frac{2^n}{4n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, czyli należy wykluczyć dowolnie małe otoczenie zera, sprawdzam czy ciąg jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $A=[a,1]$, gdzie 0<a<1:

$\sup_{x\in A}\left|\frac{2^n x}{1+n2^n x^2}\right|=\max\{0,\frac{2^n a}{1+n2^n a^2}\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$

czyli ciąg jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $A=[a,1]$, gdzie a – liczba dowolnie bliska 0.