Zadanie 2 zestaw IX

Wiktor Kołodziej, Gr. VI

1 Temat

Rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera funkcje:
a) $f(x) = |x|, \qquad x \in [-\pi, \pi]$
b) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad x \in [0, 2\pi]$
c) $f(x) = 10 - x, \qquad x \in [5, 15]$

2 Rozwiązanie

ad a) Zauważam, że funkcja $f(x) = |x|$ jest parzysta i spełnia warunki Dirichleta. Na tej podstawie:

$$a_n = \frac{2}{n} \int_{[0,l]} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = 0$$

$$l = \pi$$

Obliczam a_n

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int_0^\pi x \cos nx dx = \begin{vmatrix} x & \cos nx \\ 1 & \frac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{x \sin nx}{n} - \frac{1}{n} \int \sin nx dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{1}{n^2} \cos nx + C$$

Ostatecznie:

$$a_n = \frac{2}{\pi} (\frac{1}{n^2} \cos nx) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

Zauważmy, że:

$$a_{2n} = 0$$

oraz

$$a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$$

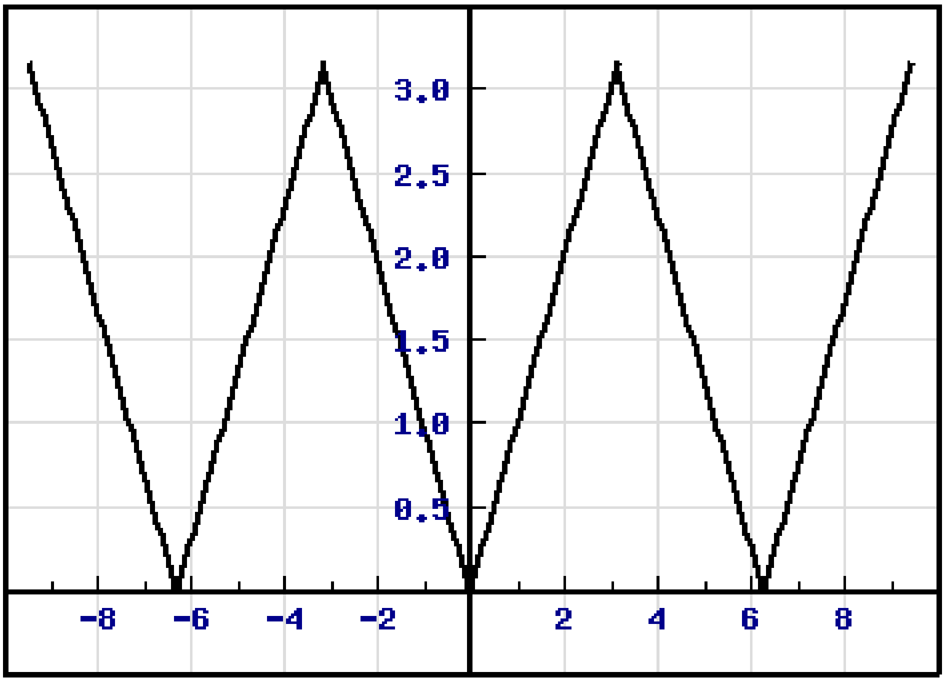
Wyznaczam a_0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi$$

Ostatecznie wyznaczam sumę:

$$S_F = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}$$

Wykres sumy:



ad b) Funkcja $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ spełnia wewnąrz przedziału warunki Dirichleta.

$$l = \pi$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos nx dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos nx dx = \begin{vmatrix} x-\pi & \cos nx \\ 1 & \frac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$(x-\pi)\frac{x\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int \sin nx dx = (x-\pi)\frac{x\sin nx}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx + C$$

Ostatecznie:

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx)\right|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

Wyznaczę teraz b_n:

$$b_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin nx dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int (x-\pi)\sin nx dx = \begin{vmatrix} (x-\pi) & \sin nx \\ 1 & -\frac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$(\pi - x)\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int \cos nx dx = (\pi - x)\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx + C$$

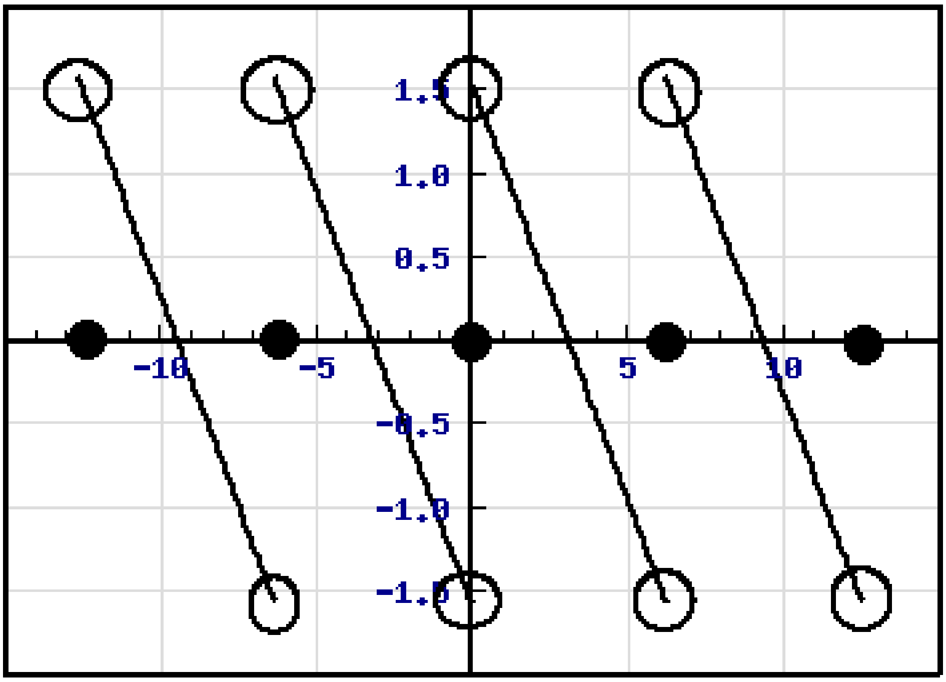
Zatem:

$$b_n = -\frac{1}{2\pi}\left((\pi - x)\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{n}$$

Ostatecznie więc suma wynosi:

$$S_F = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right]$$

Wykres sumy:



ad c) Przesuwam funkcję $f(x) = 10 - x$ tak, by była określona w przedziale $[5, 15]$. Funkcja $f(x) = 10 - x$ spełnia wewnąrz przedziału $[5, 15]$ warunki Dirichleta.

$$l = 5$$

Z nieparzystości funkcji:

$$a_n = 0$$

$$a_0 = 0$$

Wyznaczę teraz b_n:

$$b_n = -\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} x\sin\frac{nx}{5}dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int x\sin\frac{nx}{5}dx \left| \begin{array}{cc} x & \sin\frac{nx}{5} \\ 1 & -\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5} \end{array} \right| =$$

$$-x\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}+\frac{5}{n\pi}\int\cos\frac{n\pi x}{5}dx=-x\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}+(\frac{5}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi x}{5}+C$$

Zatem:

$$b_n=-\frac{1}{n\pi}\left[-x\cos\frac{n\pi x}{5}+\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right]\Big|_{-5}^{5}=\frac{10}{n\pi}(-1)^n$$

Ostatecznie więc:

$$S_F=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{10}{n\pi}(-1)^n\cdot\sin\frac{n\pi x}{5}\right]$$

Wykres sumy: