Zad 3.: Opracowanie: Tomasz Wilczyński

$$\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = b > 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. a = b wtedy $u_{n+1} = v_{n+1} = a = b$. Są to ciągi stałe, mają tą samą granicę.
2. a > b wtedy

$$u_0 > v_1 > u_1 > v_0$$
$$v_1 > v_2 > u_2 > u_1$$
$$v_2 > v_3 > u_3 > u_2$$
.
.
$$v_n > v_{n+1} > u_{n+1} > u_n$$

czyli ciąg v_n jest malejący, ciąg u_n jest rosnący i oba są ograniczone przez liczby u_0, v_0, posiadają więc granice.

$$\lim u_n = \alpha \ , \ \lim v_n = \beta$$
$$v_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2}$$

Z tw. o złożeniu granic lim $v_n = \dfrac{\lim v_n + \lim u_n}{2}$

$\lim v_{n+1} = \lim v_n$ więc

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$$ c. b. d. u.

3.Dla a < b dowód przebiega w sposób analogiczny.