Autor: Joanna Zięba

Zadanie 3.
Dane są dwie różne σ-algebry U_1 i U_2 na Ω. Sprawdzić, czy $U_1 \cup U_2$ jest σ-algebrą na Ω.

U_1 i U_2 spełniają definicję σ-algebry:

1. $\Omega \in U_1 \wedge \Omega \in U_2$;
2. $\underset{A \in U_1}{\forall} A' \in U_1 \wedge \underset{A \in U_2}{\forall} A' \in U_2$;
3. $\underset{n \in N}{\forall} A_n \in U_1 \Rightarrow \bigcup_{n \in N} A_n \in U_1 \wedge \underset{m \in N}{\forall} A_m \in U_2 \Rightarrow \bigcup_{m \in N} A_m \in U_2$

Aby $U_1 \cup U_2$ było σ-algebrą, musiałoby spełniać te same aksjomaty dla dowolnych U_1 i U_2:

1. $\Omega \in U_1 \cup U_2$;
2. $\underset{A \in U_1 \cup U_{21}}{\forall} A' \in U_1 \cup U_2$;
3. $\underset{n \in N}{\forall} A_n \in U_1 \cup U_2 \Rightarrow \bigcup_{n \in N} A_n \in U_1 \cup U_2$

Możemy podać kontrprzykład świadczący, że tak nie jest:

$\Omega = R$;
$U_1 = \{\Omega, \phi, [2,4],]-\infty,2[\cup]4,+\infty[\}$;
$U_2 = \{\Omega, \phi,]0,1[,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[\}$
$U_1 \cup U_2 = \{\Omega, \phi, [2,4],]0,1[,]-\infty,2[\cup]4,+\infty[,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[\}$
Widać, że $U_1 \cup U_2$ nie zawiera np. elementu $]0,1[\cup[2,4]$ będącego połączeniem $]0,1[$ i $[2,4]$, nie jest więc σ-algebrą na Ω.