Zadanie 13 c) „Zbiór zadań z analizy matematycznej" Józef Banaś Stanisław Wędrychowicz, strona 139:
Obliczyć pole figury ograniczonej następującą linią zamkniętą:

$$(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że prawa strona tego równania musi być nieujemna, skąd $x \in [0,1]$. Powyższe równanie możemy przekształcić do dwóch następujących:

$y_1 = \sqrt{x - x^2} + \arcsin x$ oraz $y_2 = -\sqrt{x - x^2} + \arcsin x$.

Zastanówmy się teraz, gdzie te dwa wykresy funkcji się przetną. Rozwiązując równanie $y_1 = y_2$ wychodzi, że tylko w dwóch punktach: 0 i 1. Wynika stąd, iż w zadanym przedziale jedna z funkcji jest większa od drugiej. Powstaje uzasadnione pytanie która. Ponieważ z definicji mamy, że $f \geq g$ na przedziale $[a,b] \Leftrightarrow \forall_{x \in [a,b]}\, f(x) \geq g(x)$, więc dla dowolnego x (np. równego ½) tym bardziej. Z tego, że $y_1(1/2) > y_2(1/2)$ wnioskujemy, że $y_1 > y_2$. Mamy już wszystko, co jest nam potrzebne do zastosowania poznanego na wykładzie z analizy matematycznej wzoru:

D – obszar ograniczony krzywymi:

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$,

przy tym: $\forall_{x \in [a,b]}\, g(x) \leq f(x)$,

pole obszaru D jest równe: $|D| = \int_{[a,b]} [f(x) - g(x)]\,dx$.

W naszym przypadku pole obszaru D jest równe:

$\int_{[0,1]} (y_1 - y_2)\,dx = 2\int_{[0,1]} \sqrt{x - x^2}\,dx$ Funkcja podcałkowa na przedziale]0,1[jest ciągła, więc możemy zastosować twierdzenie Newtona-Leibniza i zapisać:

$2\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx$ Spróbujmy teraz obliczyć tę całkę stosując metodę współczynników nieoznaczonych Lagrange'a:

$\int \sqrt{x - x^2}\,dx = (ax + b)\sqrt{x - x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$ Różniczkując obustronnie i mnożąc przez $2\sqrt{x - x^2}$ otrzymujemy: $2x - 2x^2 = 2ax - 2ax^2 + ax - 2ax^2 + b - 2bx + 2\lambda$ Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach wyliczamy: $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}, \lambda = \frac{1}{8}$ Pozostaje do obliczenia całka $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$. Wykonując podstawienie $\frac{1}{2}u = x - \frac{1}{2}$ przekształcamy ją do postaci $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$ która jest całką elementarną z arcsin*u.*

Uwzględniając powyższe rozważania ostatecznie otrzymujemy:

$2\left(\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\sqrt{x - x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x - 1) \right)\Big|_0^1$ co po przeliczeniu daje wynik: $\frac{\pi}{4}$.