Opracowanie: Kamil Piekarz

Zestaw V. Zadanie 3.

a) Aby sprawdzić czy $d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$ określa metrykę w $X = R\setminus\{0\}$ sprawdzimy czy spełnione są aksjomaty metryki:

$1^o \quad \underset{x,y\in X}{\forall} \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \ge 0 \Leftrightarrow \underset{x,y\in X}{\forall} \ d(x,y)\ge 0$

$2^o \quad \underset{x,y\in X}{\forall} d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|(-1)*(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})\right| = |-1|*\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right| = d(y,x) \Leftrightarrow \underset{x,y\in X}{\forall} \ d(x,y)=d(y,x)$

$3^o \quad \underset{x,y,z\in X}{\forall} \ d(x,y)+d(y,z)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right| \ge \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right| = d(x,z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underset{x,y,z\in X}{\forall} \ d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

$4^o \quad \underset{x,y\in X}{\forall} \ d(x,y)=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{y} \Leftrightarrow y=x$

b) Skorzystamy z definicji kuli otwartej:

$$\mathrm{K}(2,\frac{1}{3}) = \left\{x\in R/\{0\} : d(x,2) < \frac{1}{3}\right\}$$

$$d(x,2)<\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{2}<\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2}>-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{5}{6}<0 \Leftrightarrow \frac{6-5x}{6x}<0 \Leftrightarrow x\cdot(\frac{6}{5}-x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,0[\cup]\frac{6}{5},+\infty[$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}>-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{6}>0 \Leftrightarrow \frac{6-x}{6x}>0 \Leftrightarrow x\cdot(6-x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]0,6[$$

$$\mathrm{K}(2,\frac{1}{3}) = \begin{cases} x\in\,]-\infty,0[\cup]\frac{6}{5},+\infty[\\ x\in\,]0,6[\end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{K}(2,\frac{1}{3}) = \{x : x\in\,]\frac{6}{5},6[\}$$

c) $a_n = \frac{n+1}{2n+3} \quad g = \frac{1}{2}$

Skorzystamy z definicji granicy ciągu w przestrzeni metrycznej (X,d):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d\left(a_n, g\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d\left(a_n, g\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(\frac{n+1}{2n+3}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{1}{\frac{n+1}{2n+3}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{1}{n+1}\right|\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = g$$

cbdo

d) Skorzystamy z definicji ograniczoności zbioru:

$$A - ograniczony :\Leftrightarrow \underset{K(x_o, r)}{\exists} \quad A \subset K(x_o, r)$$

Musimy zatem znaleźć taką kulę, aby zawarł się w niej cały zbiór liczb naturalnych.

$$K(x_o, r) = \{x \in X : d(x, x_o) < r\}, x \in N$$

Niech $x_o = 1$ (zakładamy jakieś dane x_o i spróbujemy do niego dostosować promień kuli r, tak aby objąć kulą cały zbiór liczb naturalnych).

$$d(x,1) < r \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{1}\right| < r \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - 1\right| < r$$

Wiadomo, że dla $x \in N \quad 0 \le \frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow$ dla r=2 nierówność $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < r$ jest spełniona dla każdego $x \in N \Rightarrow N \subset K(1,2) \Rightarrow$ zbiór N jest ograniczony.

cbdo