Zestaw VI zadanie 3.: Opracował: Tomasz Wilczyński

$f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$

a)

$\forall x\in R\ \ \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$

$D_p=R$

$D_j=?$

$$d_c(f_n,f)=\sup_{x\in R}\left|\underbrace{\sin\frac{x}{n}-0(x)}_{h_n(x)}\right|=1\overset{n\to\infty}{\not\to}0$$

Co należy „wyrzucić”?

$$\left|\sin\frac{x}{n}\right|=1\Leftrightarrow\frac{x}{n}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x_n=\frac{n\pi}{2}+nk\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}\infty & k\ge 0\\ -\infty & k<0\end{cases}$$

Należy więc „wyrzucić” otoczenie ∞ i -∞.

$D_j=[a,b]$, a>b.

Należy teraz dowieść że ta zbieżność jest jednostajna:

$$\underset{[a,b]}{d_c}(f_n,f)=\sup_{x\in[a,b]}\left|\sin\frac{x}{n}\right|=(*)$$

$$\begin{cases}a>\frac{n\pi}{2}-nk\pi\\ b<\frac{n\pi}{2}+nk\pi\end{cases}\Rightarrow\forall k\in N\cup\{0\}\begin{cases}\frac{a}{n}>\frac{\pi}{2}-k\pi\\ \frac{b}{n}<\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{n}>-\frac{\pi}{2},\frac{b}{n}<\frac{\pi}{2}\ \text{dla } n>n_0$$

$$(*)=(\text{dla } n>n_0)=\max\left\{\underbrace{\left|\sin\frac{a}{n}\right|}_{\downarrow\, 0},\underbrace{\left|\sin\frac{b}{n}\right|}_{\downarrow\, 0}\right\}\overset{n\to\infty}{\to}0$$

$$\left.\begin{array}{l}k\ge 0:\lim_{n\to\infty}x_n=\infty\Rightarrow\forall b\in R\quad\exists n_0\quad\forall n>n_0\quad x_n>b\\ k<0:\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty\Rightarrow\forall a\in R\quad\exists n_1\quad\forall n>n_1\quad x_n<a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\forall a,b\in R\quad\exists n_2=\max\{n_0,n_1\}\in N\quad\forall n\ge n_2\quad x_n<a\vee x_n>b\Rightarrow\forall n\ge n_0\quad\sup_{x\in[a,b]}\left|\sin\frac{x}{n}\right|=\max\left\{\sin\frac{a}{n},\sin\frac{b}{n}\right\}\overset{n\to\infty}{\to}0$$

c.b.d.u.

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}(f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{n}}\underbrace{\cos\frac{x}{n}}_{ogr.} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \frac{d0}{dx} = 0$$

Są to wyrażenia sobie równe.

c)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \sin\frac{x}{n}dx = \lim_{n\to\infty}(\lim_{A\to\infty}(-n\cos\frac{x}{n})\Big|_0^A) = \lim_{n\to\infty}(\underbrace{\lim_{A\to\infty}(-n\cos\frac{A}{n}+n)}_{(*)})$$ - nie istnieje bo (*) nie istnieje.

$$\int_0^\infty\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n}\,dx = \int_0^\infty 0dx = 0\,.$$

Te wyrażenia nie są równe. Wniosek: kolejność przejścia granicznego nie jest obojętna bo $f_n(x)$ nie jest jednostajnie zbieżny.