# Zadanie 3 zestaw IX

Wiktor Kołodziej, Gr. VI

## 1 Temat

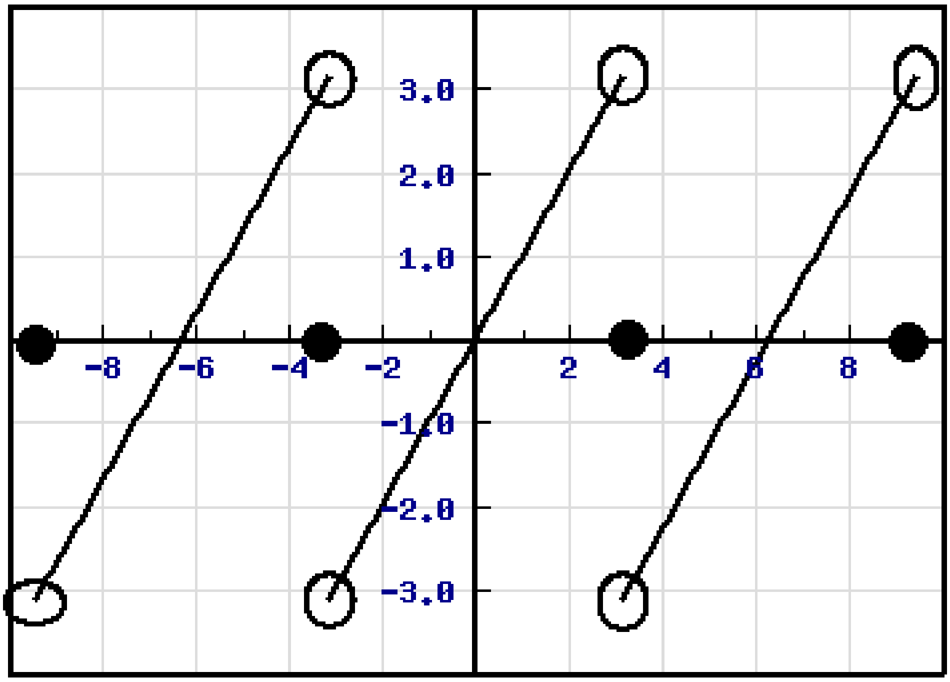
Rozwinąć w niepełne szeregi Fouriera funkcje:
a) $f(x) = x, \qquad x \in [0, \pi]$
b) $f(x) = x^2, \qquad x \in [0, \pi]$
Narysować wykresy sum otrzymanych szeregów, oraz obliczyć sumy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

## 2 Rozwiązanie

ad a) Rozwinę najpierw funkcję w szereg sinusów. Aby to zrobić, zauważam, że funkcję należy przedłużyć „nieparzyście”.

Wykres sumy:




Wtedy:

$$l = \frac{\pi + \pi}{2} = \pi$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int x \sin nx dx = \left| \begin{array}{cc} x & \sin nx \\ 1 & -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = -x\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int \cos nx dx = -x\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx + C$$

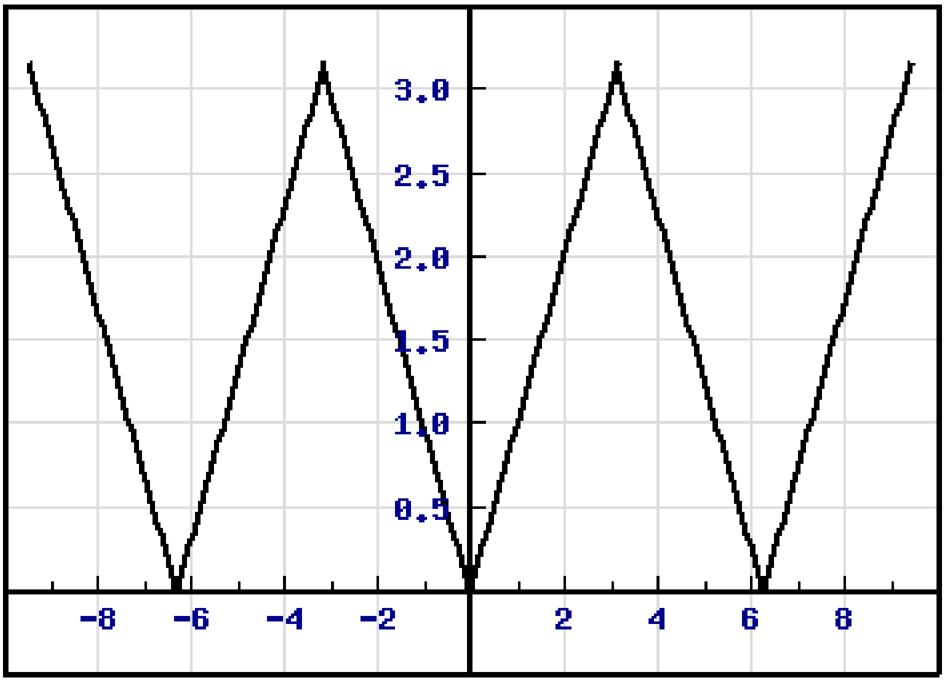
Zatem:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$S_S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx\right]$$

Rozwinę teraz funkcję w szereg cosinusów. Aby to zrobić, zauważam, że funkcję należy przedłużyć „parzyście”.

Wykres sumy:




Wtedy:

$$l = \pi$$

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos nx dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int x \cos nx dx = \left| \begin{matrix} x & \cos nx \\ 1 & \frac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right| = x\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int \sin nx dx = x\frac{\sin nx}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx + C$$

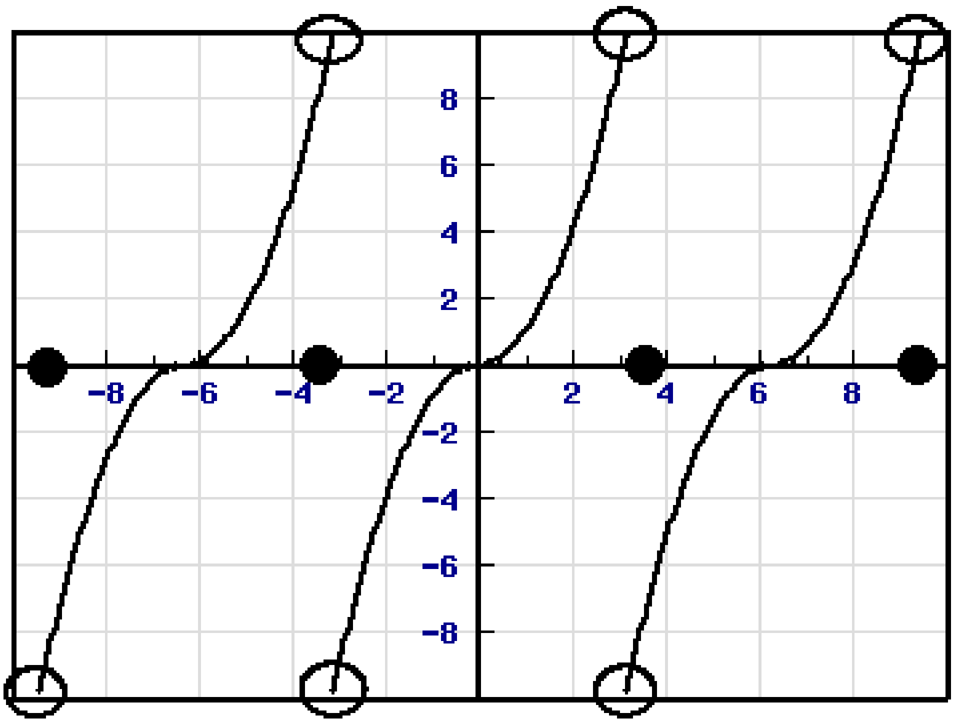
Zatem:

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\left[ -(x \sin nx + \frac{1}{n}\cos nx)\Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & dla \quad n = 2k \\ -\frac{4}{\pi n^2} & dla \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$S_C = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[ -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x \right]$$

ad b) Rozwinę najpierw funkcję w szereg sinusów. Aby to zrobić, zauważam, że funkcję należy przedłużyć „nieparzyście”.

Wykres sumy:




Wtedy

$$l = \frac{\pi + \pi}{2} = \pi$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin nx dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int x^2 \sin nx dx = \begin{vmatrix} x^2 & \sin nx \\ 2x & -\frac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} = -x^2 \frac{\cos nx}{n} + \frac{2}{n} \cos nx dx =$$

$$\begin{vmatrix} x & \cos nx \\ 1 & \frac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} = -x^2 \frac{\cos nx}{n} + \frac{2x \sin nx}{n^2} + \frac{2}{n^3} \cos nx + C$$

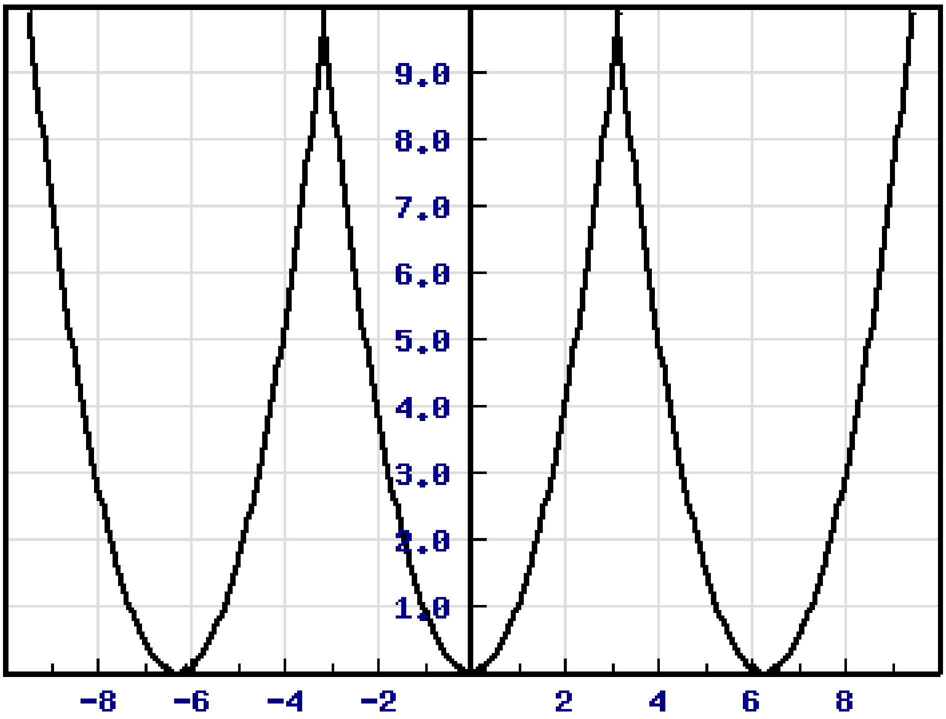
Zatem:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left( -x^2 \frac{\cos nx}{n} + \frac{2x \sin nx}{n^2} + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^\pi = \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{2}{n^2} (-1)^n - \frac{2}{n^2} - \pi^2 (-1)^n \right]$$

Ostatecznie więc suma wynosi:

$$S_S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{4}{n^3} (-1)^n - \frac{4}{n^3} - \frac{2}{\pi n} (-1)^n \right) \cos nx \right]$$

Rozwinę teraz funkcję w szereg cosinusów. Aby to zrobić, zauważam, że funkcję należy przedłużyć „parzyście". Wykres sumy:




Wtedy:

$$l = \pi$$

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

Obliczenie pomocnicze:

$$\int x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{cc} x^2 & \cos nx \\ 2x & -\frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = x^2 \frac{\sin nx}{n} - \frac{2}{n} \sin nx dx =$$

$$\left| \begin{array}{cc} x & \sin nx \\ 1 & -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = x^2 \frac{\sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2}{n^3} \sin nx + C$$

Zatem:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left( x^2 \frac{\sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2}{n^3} \sin nx \right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Wyznaczam teraz sumę:

$$S_C = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[ \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx) \right]$$

Na koniec pozostaje wstawić do otrzymanych sum $x = 0$ lub $x = \pi$ by obliczyć szukane sumy, i tak:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$