opracowanie: Roman Sienko

4.a) $ar\,\text{ctg}\,x = arc\,\text{ctg}(1/x)$

Założenia: $x \neq 0$

Niech $f(x) = ar\,\text{ctg}\,x - arc\,\text{ctg}(1/x)$

wtedy $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

Teraz łatwo zauważyć, że dla $x > 0$ $f(x) = 0$, a więc równość 4a jest spełniona dla $x > 0$.

4.b) $2ar\,\text{ctg}\,x + arc\sin(\frac{2x}{1+x^2}) = \pi$

Założenia: $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$

$$\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow |x| = 1$$

ekstrema: $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ oraz

$$\lim_{x->\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x->-\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

zatem $x \in R$

Niech $f(x) = 2ar\,\text{ctg}\,x - arc\sin(\frac{2x}{1+x^2}) - \pi$

wtedy $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + 2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}} = 2\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{|1-x^2|}\right)$

Rozważmy przypadki:

I. $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} > 0$$

$$f(-1) = -2\pi$$

$$f(1) = 0$$

II. $1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

$$f'(x) = 0$$

zauważamy, że dla $x \leq -1$ $f(x) = -2\pi$,

dla $x \geq 1$ $f(x) = 0$

Odp. Równość zachodzi dla $x \geq 1$.

Roman Sienko