<u>Zad. 4). Udowodnić, że:</u>

<u>a).</u> $\underset{x\in R}{\forall}\ 2x\,arctg(x) \geq \ln(1+x^2)$

Zatem:

$$\underset{x\in R}{\forall}\ 2x\,arctg(x) - \ln(1+x^2) \geq 0$$

Oznaczmy wyrażenie $2x\,arctg(x) - \ln(1+x^2)$ jako f(x).

Jeżeli $\inf\limits_{x\in R} f(x) \geq 0 \Rightarrow \underset{x\in R}{\forall}\ f(x) \geq 0$

$\inf\limits_{x\in R} f(x)$ to najmniejsza wartość spośród { $f_{\min}(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to x_0^{+,-}} f(x)$ }

Zajmijmy się minimum funkcji.

$$f'(x) = 2x\frac{1}{1+x^2} + 2arctg(x) - 2x\frac{1}{1+x^2} = 2arctg(x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2arctg(x) = 0$$

Czyli :

$$x = 0$$

$$f(x) \downarrow;\ x \in]-\infty;0[$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) \uparrow;\ x \in]0;+\infty[$$

Więc:

$$\boldsymbol{f(0) = f_{\min}(0) = 0}$$

Analizując przebieg pochodnej, można zauważyć, iż f(x) jest malejąca w przedziale $]-\infty;0[$, zaś rosnąca w przedziale $]0;-\infty[$.

Wniosek: $\inf\limits_{x\in R} f(x) = f_{\min} f(x) = 0$

Czyli

$$\boldsymbol{\inf\limits_{x\in R} f(x) \geq 0 \Rightarrow \underset{x\in R}{\forall}\ f(x) \geq 0}$$

A jest to równoważne stwierdzeniu:

$\underset{x\in R}{\forall}\ 2x\,arctg(x) \geq \ln(1+x^2)$, co kończy dowód.

b). $\forall_{x \in]0;\frac{\pi}{2}[} \sin(x) + \mathrm{tg}(x) \geq 2x$

Zatem

$\forall_{x \in]0;\frac{\pi}{2}[} \sin(x) + \mathrm{tg}(x) - 2x \geq 0$

Jak w poprzednim przykładzie zastosujmy oznaczenie $\sin(x) + \mathrm{tg}(x) - 2x$ jako f(x).

Jeżeli $\inf_{x \in]0;\frac{\pi}{2}[} f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

Rozpocznijmy od granic w końcach przedziału określoności (nie posiada ona punktów nieciągłości):

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [\sin(x) + \mathrm{tg}(x) - 2x] = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} [\sin(x) + \mathrm{tg}(x) - 2x] = \infty$$

Przejdźmy do badania pochodnej.

$$f'(x) = \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 2 = \frac{\cos^3(x) - 2\cos^2(x) + 1}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^3(x) - 2\cos^2(x) + 1}{\cos^2(x)} = 0$$

$$\cos^3(x) - 2\cos^2(x) + 1 = 0$$

Podstawiając:

$\cos(x) = t$; gdzie $t \in]0;1[$

Otrzymujemy:

(1) $t^3 - 2t^2 + 1 = 0$

Korzystając z tabelki Hornera:

	1	-2	0	1
1	1	-1	-1	0

A więc:

$(t-1)(t^2 - t - 1) = 0$

Rozwiążmy równanie kwadratowe $t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{5}$

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Rozwiązaniami równania (1) są liczby:

$$\underset{t \notin]0;1[}{t=1} \vee \underset{t \notin]0;1[}{t=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx -0.618} \vee \underset{t \notin]0;1[}{t=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 1.618} \Rightarrow \text{Brak rozwiązań} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Brak minimów lokalnych.

Więc:

$$\inf_{x \in]0;\frac{\pi}{2}[} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Zatem:

$$\boldsymbol{\inf_{x \in]0;\frac{\pi}{2}[} f(x) \geq 0 \Rightarrow \forall_{x \in]0;\frac{\pi}{2}[} f(x) \geq 0}$$

A jest to równoważne stwierdzeniu:

$\forall_{x \in]0;\frac{\pi}{2}[} \sin(x) + \mathrm{tg}(x) \geq 2x$, co należało dowieść.