**Autor: Joanna Zięba**

**Zadanie 4.**
**Niech $\delta_{x1}$ i $\delta_{x2}$ oznaczają miary Diraca na $(\Omega, 2^{\Omega})$. Dla jakich $a,b \in R$ $\mu = a\delta_{x1} + b\delta_{x2}$ jest miarą, a dla jakich jest prawdopodobieństwem?**

$\delta_{x1}$ i $\delta_{x2}$ są to miary Diraca na $(\Omega, 2^{\Omega})$, spełniają więc definicję miary Diraca:

1. $\delta_{x1}(\phi) = 0 \wedge \delta_{x2}(\phi) = 0$
$\mu(\phi) = a\delta_{x1}(\phi) + b\delta_{x2}(\phi) = a\cdot 0+b\cdot 0 = 0$
$\mu$ spełnia warunek dla dowolnych a i b.

2. $\underset{(A_n)_{n\in N}\subset 2^{\Omega}}{\forall} \delta_{x1}\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x1}(A_n) \wedge \underset{(A_n)_{n\in N}\subset 2^{\Omega}}{\forall} \delta_{x2}\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x2}(A_n)$

$\mu\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = a\cdot\delta_{x1}\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) + b\cdot\delta_{x2}\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = a\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x1}(A_n) + b\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x2}(A_n) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (a\delta_{x1}(A_n) + b\delta_{x2}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$

$\mu$ spełnia warunek o ile a i b są liczbami nieujemnymi, gdyż miara przyjmuje wartości nieujemne.

3. $\underset{A\subset 2^{\Omega}}{\forall} \delta_{x1}(A)=0 \wedge B\subset A \Rightarrow \delta_{x1}(B)=0;$ $\underset{A\subset 2^{\Omega}}{\forall} \delta_{x2}(A)=0 \wedge B\subset A \Rightarrow \delta_{x2}(B)=0;$
$\mu(A) = a\delta_{x1}(A) + b\delta_{x2}(A) = a\cdot 0+b\cdot 0 = 0$
Dla $B\subset A$: $\mu(B) = a\delta_{x1}(B) + b\delta_{x2}(B) = a\cdot 0+b\cdot 0 = 0$
$\mu$ spełnia warunek dla dowolnych a i b.

4. $\delta_{x1}(\Omega)=1;$ $\delta_{x2}(\Omega)=1;$
$\mu(\Omega) = a\delta_{x1}(\Omega) + b\delta_{x2}(\Omega) = a + b.$
$\mu$ spełnia ten warunek kiedy $a + b = 1$.

Podsumowując, $\mu$ jest miarą kiedy spełnia aksjomaty 1. i 2., a więc dla a i b nieujemnych. Prawdopodobieństwo spełnia wszystkie cztery warunki, więc $\mu$ jest prawdopodobieństwem dla nieujemnych a i b takich, że ich suma wynosi 1.