Opracowanie: Jakub Suder

Zadanie: Oblicz pole pętli danej parametrycznie:
$x = t^2 - 1$
$y = t^3 - t$
(Banaś, s. 139, z. 18b)

Rozwiązanie:

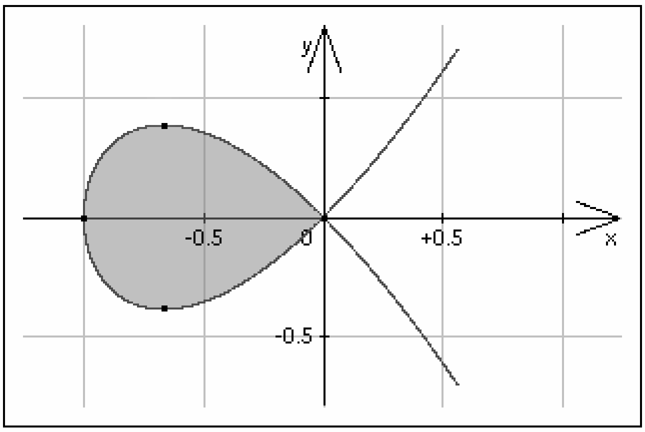
Narysujmy przybliżony wykres krzywej:
- punkty przecięcia z osiami:
x=0: t=1lub t=-1
y=0: t=1lub t=-1lub t=0

- pochodne:
$x' = 2t$
$y' = 3t^2 - 1$

$x'=0$ lub $t = 0$
$x'>0$ lub $t > 0$
$y'=0$ lub $t = \pm{}^{\sqrt{3}}/_{3}$
$y'>0$ lub $t < -{}^{\sqrt{3}}/_{3}$ $\quad t > {}^{\sqrt{3}}/_{3}$

- tabelka:

t	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, -{}^{\sqrt{3}}/_{3}[$	$-{}^{\sqrt{3}}/_{3}$	$]-{}^{\sqrt{3}}/_{3}, 0[$	0	$]0, {}^{\sqrt{3}}/_{3}[$	${}^{\sqrt{3}}/_{3}$	$]{}^{\sqrt{3}}/_{3}, 1[$	1	$]1, +\infty[$
x'	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
y'	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
x	$+\infty \searrow$	0	$\searrow$	$-{}^{2}/_{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-{}^{2}/_{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$
y	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$	${}^{2}/_{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-{}^{2}/_{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$



Policzmy $|D_1|$ = część pętli powyżej osi x; $|D| = 2\,|D_1|$.

$$|D_1| = \int_{-1}^{0} |y(t)\,x'(t)|\,dt = \int_{-1}^{0} |(t^3 - t)\cdot 2t|\,dt = 2\int_{-1}^{0} |t^4 - t^2|\,dt$$

Dla $t \in [-1,0]$ wartość t^4-t^2 jest zawsze ujemna. Więc $|t^4-t^2| = t^2-t^4$.

$$|D_1| = 2\int_{-1}^{0} (t^2 - t^4)\,dt = 2\cdot\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_{-1}^{0} = 2\cdot\left(0 - 0 - \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{5}\cdot(-1)\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 2\cdot\frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

$|D| = 2\,|D_1| = 2 \cdot {}^{2}/_{15} = {}^{4}/_{15}$