Zadanie 4 zestaw IX

Wiktor Kołodziej, Gr. VI

1 Temat

Rozwinąć w szereg cosinusów funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \in]\frac{3}{2}, 2] \\ 3 - x & dla \quad x \in]2, 3] \end{cases}$$

Narysować wykres sumy otrzymanego szeregu.

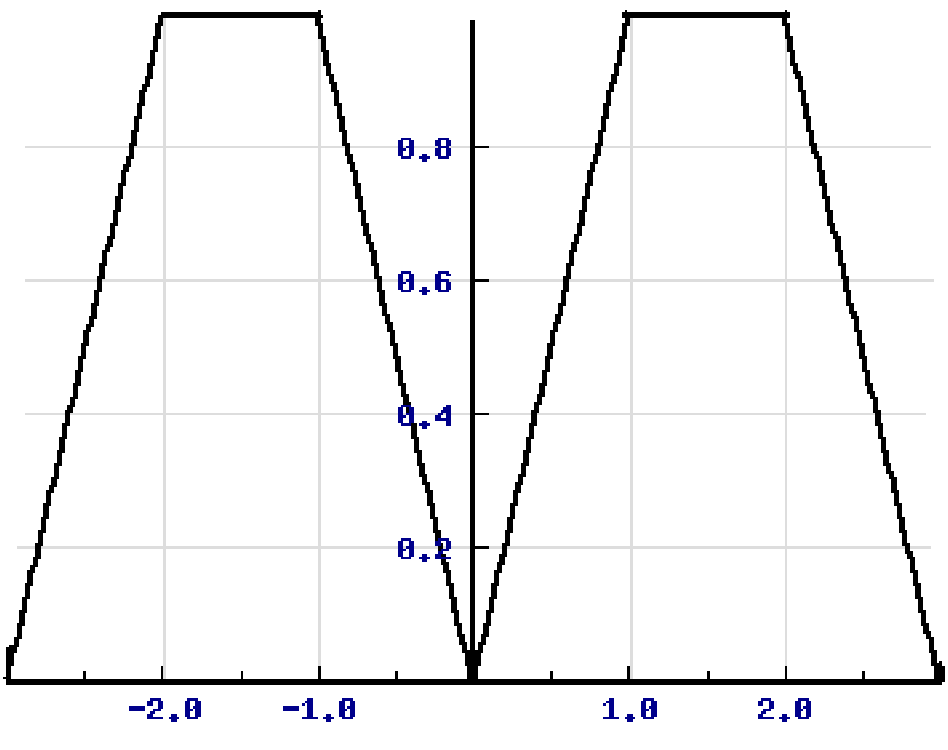
2 Rozwiązanie

Ponieważ funkcję mam rozwinąc w szereg cosinusów, to podany przedział, w którym funkcja jest określona, będzie połową okresu:

$$l = \frac{3}{2}$$

Ponieważ funkcja ma być parzysta, więc przedłużam wykres w sposób parzysty.

Funkcja spełnia przedziałami warunki Dirichleta, wartości w punktach „sklejenia” są równe średniej arytmetycznej granic prawo i lewo stronnych. Funkcja po takich zabiegach jest parzysta, więc tak wygląda wykres sumy:



oraz:

$$b_n = 0$$

Obliczam dwie całki po przedziałach $[0,1]$ i $[1,\frac{3}{2}]$

$$a_n = \frac{4}{3}\left[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right]$$

Obliczenia pomocnicze:

$$\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \left|\begin{array}{cc} x & \cos\frac{2n\pi x}{3} \\ 1 & \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3} \end{array}\right| = \frac{3}{2n\pi}\left[x\sin\frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$\frac{3}{2n\pi}\left[\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} - 0 - \frac{3}{2n\pi}\right] = \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2}$$

Oraz druga całka:

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_1^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Wstawiając policzone całki do wzoru na a_n:

$$a_n = \frac{4}{3}\left[\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2} - \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}\right] =$$

$$\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{n^2\pi^2}$$

Obliczę teraz a_0:

$$a_0 = \frac{4}{3}\left[\int_0^1 xdx + \int_1^{\frac{3}{2}} dx\right] = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + x\Bigg|_1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}$$

Ostatecznie więc suma jest równa:

$$S_c = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{n^2\pi^2}\right)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]$$