Matematyka Dyskretna

Zestaw 1.

1. Udowodnij, że:
(a) $37^{100} - 37^{20}$ dzieli się przez 10; (b) $37^{20} - 37^{4}$ dzieli się przez 10;
(c) $37^{500} - 37^{4}$ dzieli się przez 10; (d) $37^{4} - 1$ dzieli się przez 10;
(e) $37^{500} - 1$ dzieli się przez 10.

2. Sprawdź, czy podany dowód poniższego twierdzenia jest poprawny.

Twierdzenie: Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią. Dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n mamy $a^{n-1} = 1$.

Dowód: Jeśli $n = 1$, to $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$. Z kolei na mocy indukcji, przy założeniu, że twierdzenie jest prawdziwe dla $1, 2, \ldots, n$, mamy

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{(n-1)-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

3. Sprawdź prawdziwość twierdzenia i poprawność jego dowodu.

Twierdzenie: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$.

Dowód: Korzystamy z indukcji względem n. Dla $n = 1$ oczywiście $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{1\cdot 2}$. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n. Wówczas

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

4. Liczba pierwsza, to liczba całkowita większa od jedynki, która ma dokładnie dwa dzielniki naturalne, jedynkę i samą siebie. Opierając się na tej definicji, udowodnij za pomocą indukcji matematycznej, że każda liczba całkowita większa od jedynki może być zapisana w postaci iloczynu jednej lub więcej liczb pierwszych.

5. Definiujemy ciąg Fibonacciego $F_0, F_1, F_2, \ldots$ w sposób następujący: $F_0 = 0, F_1 = 1$, a dla $n \geqslant 2$ $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Niech $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzą nierówności

$$\phi^{n-2} \leqslant F_n \leqslant \phi^{n-1}.$$

6. Sformułuj i udowodnij przez indukcję wzór na sumę:

$$1^2, 2^2 - 1^2, 3^2 - 2^2 + 1^2, 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2, 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2, \text{itd.}$$

7. (a) Udowodnij przez indukcję twierdzenie Nikomachusa pochodzące z około setnego roku naszej ery: $1^3 = 1, 2^3 = 3 + 5, 3^3 = 7 + 9 + 11, 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$, itd.

(b) Korzystając z twierdzenia Nikomachusa udowodnij słynny wzór

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

8. Udowodnij przez indukcję, że jeżeli $0 < a < 1$, to $(1-a)^n \geqslant 1 - na$.

9. Udowodnić przez indukcję, że jeśli $n \geqslant 10$, to $2^n \geqslant n^3$.

10. Znajdź i udowodnij prosty wzór na sumę:

$$\frac{1^3}{1^4 + 4} - \frac{3^3}{3^4 + 4} + \frac{5^3}{5^4 + 4} - \ldots + \frac{(-1)^n (2n+1)^3}{(2n+1)^4 + 4}.$$