Matematyka Dyskretna
Zestaw 2.

1. Udowodnić następująca nierówność:

$$p(n): \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \text{dla } x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0.$$

Wskazówka: Najpierw udowodnij, że $p(2)$ jest prawdziwe. Następnie przyjmując, $x_n = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}$ udowodnij, że z tego że prawdziwe jest $p(n)$ wynika, że prawdziwe jest $p(n-1)$ i w końcu pokaż, że z $p(n)$ i $p(2)$ wynika $p(2n)$.

2. W każdym z następujących przypadków podaj jawny wzór na s_n i udowodnij indukcyjnie jego poprawność:
(a) $s_0 = s_1 = 3$, oraz $s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$;
(b) $s_0 = 1,\ s_1 = -3$, oraz $s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$;
(c) $s_0 = 3,\ s_1 = 6$, oraz $s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$;
(d) $s_0 = 1,\ s_1 = 2$, oraz $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$.

3. W każdym z następujących przypadków podaj jawny wzór na s_n i udowodnij indukcyjnie jego poprawność:
(a) $s_0 = 2$, oraz $s_n = 5s_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$;
(b) $s_0 = c,\ s_1 = d$, oraz $s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$;
(c) $s_0 = 1,\ s_1 = 2$, oraz $s_n = 3s_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$;
(d) $s_0 = 1,\ s_1 = 2$, oraz $s_n = -2s_{n-1} + 3s_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$.

4. W każdym z następujących przypadków podaj jawny wzór na s_{2^n} i udowodnij indukcyjnie jego poprawność:
(a) $s_1 = 1$, $s_{2n} = 2s_n + 3$; (b) $s_1 = 0$, $s_{2n} = 2s_n + 5n$;
(c) $s_1 = 1$, $s_{2n} = 2s_n - 7$; (d) $s_1 = 0$, $s_{2n} = 2s_n + 5 - 7n$.

5. Dla każdego z ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie wyznacz pięć pierwszych wyrazów i udowodnij podaną nierówność:
(a) $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3$ oraz $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$; $a_n > (\frac{3}{2})^n$ dla wszystkich $n \geqslant 1$;
(b) $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$; $a_n \leqslant 2^{n-1}$ dla wszystkich $n \geqslant 1$;
(c) $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 5$ oraz $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$; $2^n < a_n \leqslant 2^{n+1}$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

6. Niech $M = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ i $M^n = \left[\begin{smallmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{smallmatrix}\right]$. Wyznacz jawne wzory na a_n, b_n, c_n i d_n.

7. Podać jawny wzór na a_n, jeżeli $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ oraz $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{a_{n-2}}$ dla $n \geqslant 2$. Jakie warunki muszą spełniać α i β, jeżeli ten ciąg jest nieskończony?

8. Niech $J(1) = 1$, a dla $n \geqslant 1$ niech $J(2n) = 2J(n) - 1$, $J(2n+1) = 2J(n) + 1$. Oblicz $J(100)$. Dla jakich n zachodzi równość $J(n) = 1$?

9. Niech $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i dla $n \geqslant 2$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Udowodnić następującą równość odkrytą przez włoskiego astronoma Jean-Dominique Cassiniego w 1680 roku: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, dla dowolnej liczby naturalnej n.

10. Oblicz wyznacznik macierzy $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$