Matematyka Dyskretna
Zestaw 3.

1. Na ile sposobów prostokąt o wymiarach $2 \times n$ można pokryć w całości n prostokatami o wymiarach 2×1? Niech T_n oznacza liczbę tych sposobów. Korzystając z metody funkcji tworzących znajdź jawny wzór na T_n.

2. Na ile sposobów można wydać 50 groszy używając do tego monet o nominałach (w gr.) $1, 2, 5, 10, 20, 50$?

3. Ciąg rekurencyjny określamy wzorami: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$, dla $n \geqslant 2$. Stosując technikę funkcji tworzących znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu.

4. Niech $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, (liczbę H_n nazywamy n-tą liczbą harmoniczną). Ile wynosi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{10^n} \ ?$$

5. Niech $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ będzie ciągiem określonym wzorami: $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_0$ dla $n \geqslant 2$. Znajdź zwartą postać funkcji tworzącej ciągu $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$? Jaki związek ma ten ciąg z ciągiem Fibonacciego? Podaj jawną postać n-tego wyrazu ciągu.

6. Podaj jawną postać n-tego wyrazu ciągu $\{g_n\}_{n \geqslant 0}$ określonego rekurencyjnie wzorami: $g_0 = 1$, $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \cdots + ng_0$ dla $n \geqslant 0$.

7. Oblicz sumę $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$ korzystając z techniki funkcji tworzących.

8. Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n niech c_n oznacza ilość ciągów złożonych z n liczb wybranych ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie jedynek i dwóch następujących po sobie dwójek. Tak więc na przykład $c_3 = 17$.
(i) Pokazać, że c_n spełnia zależność rekurencyjną

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 3, \quad c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

(ii) Rozwiązać tę zależność rekurencyjną stosując technikę funkcji tworzących.

9. Niech k i n będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n,$$

gdzie każde y_i jest nieujemną liczbą całkowitą. Pokazać, że liczba ta jest równa współczynnikowi przy x^n w $(1 - x)^{-k}$.

10. Dla każdej liczby naturalnej n wyznaczyć liczbę wszystkich ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ takich, że

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0$$

oraz dla każdego i $(1 \leqslant i \leqslant 2n)$, $a_i \in \{1, -1\}$ i wszystkie sumy częściowe

$$a_1, \ a_1 + a_2, \ \ldots, \ a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$$

sa nieujemne.

Przygotował: C. Bagiński