Matematyka Dyskretna

Zestaw 4.

1. Udowodnij, że poniższe sumy są wyrazami ciągu Fibonacciego:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$; b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} F_{m+k}$.

2. Korzystając z techniki funkcji tworzących udowodnij następujące tożsamości:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$; b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} k = 0$; c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2}$;

d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2}$; e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} k^2 = 0$.

3. Odgadnij ogólną prawidłowość sugerowaną przez poniższe przykłady i ją udowodnij:

$$\begin{array}{lcr}
1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & = & 3; \\
1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & = & 8; \\
1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & = & 20; \\
1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & = & 48; \\
1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 1 & = & 112.
\end{array}$$

4. Podaj przykłady par liczb naturalnych, dla których wyznaczenie największego wspólnego dzielnika wymaga stokrotnego wykonania pętli algorytmu Euklidesa.

5. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

6. Niech F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego, tzn. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i dla $n \geqslant 2$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Wyznacz:

a) $NWD(F_{12}, F_{18})$;

b) Znajdź liczby całkowite x i y takie, że $x \cdot F_{12} + y \cdot F_{18} = NWD(F_{12}, F_{18})$.

7*. Udowodnij, że $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$.

8. Ile różnych najkrótszych dróg (w znaczeniu odległości) prowadzi z jednego rogu szachownicy do rogu przeciwległego, jeżeli poruszamy sie wieżą szachową.

9. Na ile różnych sposobów można w siedmiu ruchach przejść z pola $e1$ do pola $e8$ szachownicy, jeżeli poruszamy się ruchem króla szachowego.

10. Poniższa tabela zawiera fragment nieskończonej tablicy liczb, zwanej trójkątem harmonicznym Leibniza:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Odgadnij sposób tworzenia kolejnych wierszy w tej tablicy i zbadaj, czy nieskończone sumy liczb stojących w ukośnych kolumnach tabeli są szeregami zbieżnymi.

Przygotował: C. Bagiński