Matematyka Dyskretna

Zestaw 5.

1. (a) Udowodnić, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku długości 4 jednostek umieścimy 17 punktów, to odległość dwóch spośród nich nie przekracza 1 jednostki.

(b) W sześcianie S, którego krawędź ma długość 7 wybrano 342 punkty. Czy można znaleźć taki sześcian o boku 1 zawarty w sześcianie S, który nie zawiera żadnego z tych 342 punktów?

(c) Udowodnić, że wśród dowolnie wybranych dwudziestu jeden punktów leżących w kwadracie o boku 1 istnieją 3, które leżą w pewnym kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

(d) Udowodnić, że wśród sześciu punktów umieszczonych w prostokącie o wymiarach 3×4 zawsze można znaleźć dwa, których odległość nie przekracza $\sqrt{5}$.

2. Danych jest dziesięć odcinków, których długości są większe od 1 cm i mniejsze od 55 cm. Udowodnić, że wśród nich istnieją trzy odcinki, z których można zbudować trójkąt.

3. Niech S będzie zbiorem 25 punktów, takim, że w każdym 3-elementowym podzbiorze istnieją dwa punkty, których odległość nie przekracza 1. Udowodnić, że istnieje 13-elementowy podzbiór zbioru S, który można przykryć kołem o promieniu 1.

4. W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników. Każdy z każdym rozgrywa jedną partię. Rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnić, że pewna trójka zawodników rozegra wszystkie partie między sobą w jednym mieście.

5. Czy można znaleźć taką potęgę liczby 3, która kończyłaby się cyframi 0001 (w zapisie dziesiętnym)?

6. (a) Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych (w układzie dziesiętnym), których co najmniej jedna z cyfr równa się 3 lub 7 lub 9?

(b) Ile liczb trzycyfrowych (w układzie dziesiętnym) ma co najmniej jedną z cyfr równą 3 i co najmniej jedną z cyfr równą 7?

7. Wyznaczyć liczbę wszystkich liczb naturalnych n, $1 \leq n \leq 2.000$, które:

(a) nie są podzielne przez żadną z liczb $2, 3, 5$;

(b) nie są podzielne przez żadną z liczb $2, 3, 5, 7$;

(c) nie są podzielne przez żadną z liczb $2, 3, 5$ ale są podzielne przez 7.

8. Wyznaczyć liczbę wszystkich całkowitych nieujemnych rozwiązań równania $x_1+x_2+x_3+x_4 = 21$, dla których:

(a) $0 \leq x_i$ dla $1 \leq i \leq 4$; (b) $0 \leq x_i < 8$ dla $1 \leq i \leq 4$;

(c) $-5 \leq x_i \leq 10$ dla $1 \leq i \leq 4$; (d) $0 \leq x_1 \leq 5,\ 0 \leq x_2 \leq 6,\ 3 \leq x_3 \leq 7,\ 3 \leq x_4 \leq 8$.

9. Funkcją Eulera nazywamy funkcję $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określoną wzorem

$$\varphi(n) = |\{m \in (N) : 1 \leqslant m \leqslant n-1,\ NWD(m,n) = 1\}|,$$

innymi słowy $\varphi(n)$ – to ilość liczb naturalnych mniejszych od n, które są z n względnie pierwsze, np. $\varphi(2) = 1, \varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2, \varphi(5) = \varphi(8) = \varphi(10) = \varphi(12) = 4$. Obliczyć:

(a) $\varphi(n)$ dla $n \in \{51, 420, 12.300\}$;

(b) $\varphi(2^n)$ oraz $\varphi(2^n p)$ gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą.

10. Jakich funkcji jest więcej, czy ze zbioru 5-elementowego na 3-elementowy, czy też ze zbioru 6-elementowego na 2-elementowy?

Przygotował: C. Bagiński