Matematyka dyskretna dla informatyków

Marek Kwas
WSIiZ
marek@unix.wsiz.rzeszow.pl
www.wsiz.rzeszow.pl/mkwas/pl

13 stycznia 2006

Plan na dziś

- Podstawowe pojęcia teorii grafów:
  - ◇ grafy i grafy skierowane,
  - ◇ drogi i cykle w grafach,
  - ◇ relacje: sąsiedztwa i osiągalności,
  - ◇ grafy pełne i dwudzielne.
- Izomorfizm grafów.
- Reprezentacje grafu:
  - ◇ listy sąsiedztwa,
  - ◇ macierz sąsiedztwa.
- Przeszukiwanie grafów: wszerz i w głąb.
- Cykle Eulera i Hamiltona.
- Drzewa spinające i minimalne drzewa spinające.
- Grafy planarne.

Grafy skierowane i nieskierowane

definicje na potrzeby wykładu

- **Graf skierowany (digraf)** składa się z
  - ◇ zbioru **wierzchołków** V,
  - ◇ zbioru **krawędzi** $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\}$.
- **Graf nieskierowany** składa się z
  - ◇ zbioru wierzchołków V,
  - ◇ zbioru krawędzi $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$.

Grafy skierowane i nieskierowane

definicje ogólne

- **Graf skierowany (digraf)** G składa się z dwóch zbiorów:

  ⋄ niepustego zbioru V **wierzchołków grafu**,
  ⋄ zbioru E **krawędzi grafu**

  oraz funkcji $\gamma : E \to V \times V$.

- Dla krawędzi $e \in E$, dla której $\gamma(e) = (p, q)$, wierzchołek p nazywamy **początkiem krawędzi** e a wierzchołek q **końcem krawędzi** e. Mówimy wtedy, że e **biegnie od** p **do** q.

- Dla **grafu nieskierowanego** określamy $\gamma : E \to \{\{u, v\} : u, v \in V\}$, elementy $\gamma(e)$ nazywamy wierzchołkami e. Jeżeli $\gamma(e) = \{v\}$, to e nazywamy **pętlą**.

Drogi i cykle

- **Drogą** nazywamy ciąg krawędzi, które łączą się ze sobą.
- **Długość drogi** to liczba krawędzi w tej drodze.
- Każda droga wyznacza ciąg wierzchołków, przez który przechodzi.
- Jeżeli pierwszy wierzchołek drogi jest jednocześnie jej ostatnim wierzchołkiem, to drogę nazywamy **zamkniętą**.
- Drogę nazywamy **prostą** jeśli wszystkie jej krawędzie są różne.
- Zamkniętą drogę prostą, której ciąg wierzchołków to $v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ nazywamy **cyklem** jeśli wierzchołki $v_1 v_2 \ldots v_n$ są *różne*.

Grafy acykliczne i drogi acykliczne, grafy spójne

- **Graf** nazywamy **acyklicznym** jeżeli nie zawiera cykli.
- **Drogę** nazywamy **acykliczną** jeśli "podgraf" składający się z wierzchołków i krawędzi tej drogi jest acykliczny.
- Graf nieskierowany jest **spójny** jeżeli każda para różnych wierzchołków jest połączona drogą w tym grafie.

Relacje sąsiedztwa i osiągalności

- **Relacja sąsiedztwa** jest określona w zbiorze V wierzchołków grafu. u jest w relacji z v wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krawędź łącząca u z v.
- **Relacja osiągalności** jest określona w zbiorze V wierzchołków grafu. u jest w relacji z v wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje droga długości co najmniej 1 początku w u i końcu w v.

Proste twierdzenia

Uwaga: od tego momentu zajmujemy się grafami nieskierowanymi.

Twierdzenie 1: Jeżeli u i v są różnymi wierzchołkami grafu G i jeśli istnieje w G droga z u do v, to istnieje prosta droga acykliczna z u do v. Okazuje się że jest nią droga najkrótsza.

Twierdzenie 2: Jeśli u i v są różnymi wierzchołkami grafu acyklicznego G to istnieje co najwyżej jedna droga prosta prowadząca z u do v.

Izomorfizm grafów

- Jak scharakteryzować grafy mające identyczną strukturę?

- Załóżmy, że dwa grafy G i H nie mają krawędzi wielokrotnych.

- Dwa grafy G i H nazywamy **izomorficznymi** jeżeli istnieje takie wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $\alpha : V(G) \to V(H)$, że $\{u, v\}$ jest krawędzią w G wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$ jest krawędzią w H. Zapisujemy to krótko $G \simeq H$.

- Jaką relacją jest "bycie izomorficznymi"?

Niezmienniki izomorfizmu

- Liczba wierzchołków.
- Liczba krawędzi.
- **Ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni**.

Stopień wierzchołka to liczba krawędzi wychodzących z tego wierzchołka, z tym, że pętle liczymy podwójnie. Stopień wierzchołka v oznaczamy przez $\deg(v)$.

Lemat o uściskach dłoni: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|$.

Grafy regularne, pełne i dwudzielne

- Grafy, których wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień nazywamy **regularnymi**.
- Graf nazywamy **prostym** jeżeli nie zawiera pętli i krawędzi wielokrotnych.
- Grafy proste, w których każdy wierzchołek połączony jest z każdym innym nazywamy **pełnymi**. Grafy pełne o n wierzchołkach są izomorficzne. Oznaczamy je przez K_n.
- Grafy bez pętli, których wierzchołki V można podzielić na dwa rozłączne zbiory V_1 i V_2 takie, że dla każdej krawędzi jej jeden koniec należy do V_1 a drugi do V_2, nazywamy **dwudzielnymi**.
- Grafy proste dwudzielne dla których $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$ i które mają maksymalną liczbę krawędzi oznaczamy $K_{m,n}$.

Reprezentacje grafów

- Listy sąsiedztwa.
- Macierz sąsiedztwa.
- Grafy rzadkie vs gęste.

Przeszukiwanie grafów

- Dane: spójny graf G, $V(G)$, $s \in V(G)$
- Wykorzystujemy pomocnicze zbiory O, N

1. $O := \emptyset$, $N := \{s\}$,
2. dopóki $N \neq \emptyset$
   1. wybierz wierzchołek n z N
   2. dla każdego w sąsiada n
      jeżeli $w \notin O \cup N$ dołącz w do N
   3. usuń n z N, dołącz n do O

Uwaga: Jeżeli N zaimplementujemy jako kolejkę otrzymamy przeszukiwanie w szerz (BFS); jeżeli jako stos—przeszukiwanie w głąb (DFS).

Drogi i cykle Eulera

- Drogę prostą zawierającą wszystkie krawędzie grafu G nazywamy **drogą Eulera**. Graf zawierający taką drogę nazywamy **półeulerowskim**.

- Zamkniętą drogę Eulera nazywamy **cyklem Eulera**. Graf zawierający cykl Eulera nazywamy **eulerowskim**.

Uwaga: Cykl Eulera nie jest cyklem. . .

Fakt 1: Graf spójny jest półeulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy ma 2 wierzchołki stopnia nieparzystego.

Fakt 2: Graf spójny jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego.

Algorytm Fleury'ego

Niech G będzie grafem eulerowskim. Jak skonstruować cykl Eulera?

- Zaczynamy cykl w dowolnym wierzchołku i przechodzimy krawędzie zachowując następujące zasady:
  1. usuwamy z G przechodzone krawędzie i powstałe *wierzchołki izolowane*,
  2. przechodzimy przez *most* tylko wtedy, kiedy nie ma innej drogi.
- **Wierzchołek izolowany** to wierzchołek o stopniu 0.
- Krawędź nazywamy **mostem** jeżeli jej usunięcie powoduje, że graf przestaje być spójny.
- Jaki jest koszt (czas działania) algorytmu Fleury'ego w zależności od rozmiaru danych wejściowych?

Drogi i cykle Hamiltona

- **Drogą Hamiltona** nazywamy drogę przechodzącą przez każdy wierzchołek grafu tylko raz. Graf zawierający taką drogę nazywamy **półhamiltonowskim**.

- **Cyklem Hamiltona** nazywamy cykl przechodzący przez każdy wierzchołek grafu tylko raz. Graf zawierający taki cykl nazywamy **hamiltonowskim**.

Uwaga 1: Znalezienie prostej charakteryzacja grafów (pół)hamiltonowskich to najważniejszy problem otwarty teorii grafów.

Uwaga 2: Efektywny (działający w wielomianowym czasie) algorytm znajdujący cykl Hamiltona w grafie to złoty Graal informatyki!!

Dwa twierdzenia

Twierdzenie Orego. Jeśli graf *prosty* G ma $n \geq 3$ wierzchołków oraz

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków v i w, to graf G jest hamiltonowski.

Wniosek – twierdzenie Diraca. Jeśli graf *prosty* G ma $n \geq 3$ wierzchołków oraz $\deg(v) \geq n/2$ dla każdego wierzchołka v, to graf G jest hamiltonowski.

Problem komiwojażera

- Krawędziom grafu G przypisujemy dodatnie **wagi**. Szukamy cyklu (drogi) Hamiltona o najmniejszej sumie wag.

- Obliczenie całkowitej długości wszystkich cykli Hamiltona jest skrajnie nieefektywne. Graf K_n ma $(n-1)!/2$ takich cykli!!

- Okazuje się, że problem komiwojażera jest pod względem trudności równoważny problemowi znalezienia cyklu Hamiltona w grafie.

- Jak reprezentować graf z wagami w komputerze?

Drzewa

- **Drzewem** nazywamy spójny acykliczny graf.

Twierdzenie. G jest grafem prostym o n wierzchołkach. Następujące warunki są równoważne:

1. G jest drzewem.
2. Każde dwa różne wierzchołki G łączy dokładnie jedna droga prosta.
3. G jest spójny ale przestaje być spójny po usunięciu dowolnej krawędzi.
4. G jest acykliczny ale przestaje być acykliczny po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi.
5. G jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi.
6. G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.

Drzewo spinające grafu

- Weźmy spójny prosty graf G. Wybierzmy jakiś cykl w G. Jeżeli usuniemy jedną krawędź z tego cyklu to otrzymany graf będzie nadal spójny. Jeżeli procedurę tę powtórzymy do momentu aż w grafie nie będzie już cykli to otrzymamy **drzewo spinające grafu G**.

- Jeżeli G jest grafem z wagami to **minimalnym drzewem spinającym** grafu G nazywamy to spośród jego drzew spinających dla którego suma wag krawędzi jest najmniejsza.

- Jak znaleźć minimalne drzewo spinające?

Algorytm Kruskala

- Dane: spójny graf prosty G z wagami

- Wynik: zbiór T krawędzi minimalnego drzewa spinającego G

1. Sortujemy $E(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$.
2. $T = \emptyset$.
3. Dla $j = 1, 2, \ldots, m$

   Jeśli graf $T \cup e_j$ jest acykliczny, to dołącz e_j do T.

- Jaki jest koszt (czas działania) algorytmu w zależności od rozmiaru danych wejściowych?

Uwaga: algorytmy tego typu nazywamy **zachłannymi**.

Grafy planarne

- Graf nazywamy **planarnym** jeżeli można go narysować na płaszczyźnie bez samoprzecięć.

Fakt: K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.

Twierdzenie Kuratowskiego. Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy "nie zawiera" żadnego z grafów K_5 i $K_{3,3}$.

Zadanie do domu

Powtórzyć cały przerobiony materiał.