Materiały do wykładu MATEMATYKA DYSKRETNA dla studiów zaocznych cz. 1

Program wykładu:

KOMBINATORYKA:

1. Notacja i podstawowe pojęcia
2. Zliczanie funkcji
3. Permutacje
4. Podzbiory zbioru
5. Podzbiory k-elementowe
6. Zbiory z powtórzeniami
7. Podziały zbioru (liczby Stirlinga)
8. Podziały liczby
9. Funkcje tworzące
10. Zasada włączania-wyłączania

TEORIA GRAFÓW:

11. Elementarne pojęcia
12. Macierzowy opis grafu
13. Klasy grafów
14. Drogi i cykle w grafie
15. Drogi i cykle Eulera
16. Drogi i cykle Hamiltona
17. Spójność grafu
18. Drzewa i lasy
19. Przepływy w sieciach
20. Pokrycia i skojarzenia
21. Kolorowanie grafów

Literatura:

- Libura, Sikorski *„Wykłady z matematyki dyskretnej. Cz.I: Kombinatoryka; Cz.II: Teoria grafów”* Wydawnictwo WSISiZ (2002)
- W.Lipski *„Kombinatoryka dla programistów”* WNT (1989)
- Ross, Wright *„Matematyka dyskretna”* PWN (1996)
- R.Wilson *„Wprowadzenie do teorii grafów”* PWN (1999)
- N.Deo *„Teoria grafów i jej zastosowania w...”* PWN (1980)
- V.Bryant *„Aspekty kombinatoryki”* WNT (1997)
- R.Graham, D.Knuth, O.Patashnik *„Matematyka konkretna”* PWN (1996)

NOTACJA I POJĘCIA PODSTAWOWE

Funktory zdaniotwórcze:

$\vee$ - *lub* (alternatywa, suma logiczna)

$\wedge$ - *i* (koniunkcja, iloczyn logiczny)

$\neg$ - *nie* (negacja)

$\Rightarrow$ - *jeśli ..., to ...* (implikacja)

$\Leftrightarrow$ - *... wtedy i tylko wtedy, kiedy ...* (równoważność)

Kwantyfikatory:

$\exists$ - *istnieje* (kwantyfikator szczegółowy, egzystencjalny)

$\forall$ - *dla każdego* (kwantyfikator ogólny)

Zbiory:

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{C}$ - zespolonych,

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, ... \}$ - zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{B} = \{ 0, 1\}$ - zbiór „binarny”, $\varnothing$ - zbiór pusty,

$\{ a_1, ..., a_n \}$ - zbiór składający się z n elementów $a_1, ..., a_n$

$\{ a \}$ - zbiór jednoelementowy zawierający tylko a,

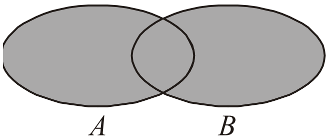
$\{ x \in X : \boldsymbol{W}(x) \}$ - zbiór tych elementów zbioru X, dla których funkcja zdaniowa $\boldsymbol{W}(x)$ ma wartość prawda,

$\cup$ - suma zbiorów, $\cap$ - iloczyn zbiorów,

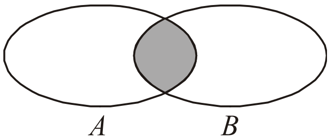
$\backslash$ - różnica zbiorów,

$\otimes$ - różnica symetryczna zbiorów: $A \otimes B = (A - B) \cup (B - A)$

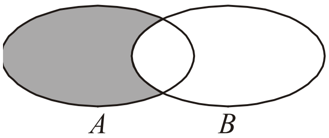
$C = A \cup B$



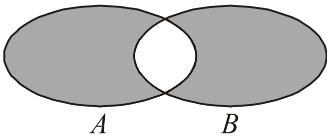
$C = A \cap B$



$C = A \setminus B$



$C = A \otimes B$



$\subseteq$ - zawieranie się zbiorów: $A \subseteq B$ (A jest zawarty w B)

$\subset$ - właściwe zawieranie się: $A \subset B$ (A jest podzbiorem właściwym zbioru B);

$\forall A: A \subseteq A$, ale $A \not\subset A$

$\mathbb{P}(A)$ - zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A;

$\forall A: \varnothing \subseteq A \Rightarrow \forall A: \varnothing \in \mathbb{P}(A)$ oraz $\forall A: A \in \mathbb{P}(A)$

$|A|$ - liczność (moc) zbioru A, np. $|\{a_1, a_2, a_3\}| = 3$

(a, b) - para uporządkowana: a - poprzednik, b - następnik

$A \times B$ - <u>iloczyn kartezjański</u> zbiorów A i B: $A \times B = \{ (a, b) : a \in A \wedge b \in B \}$

$(a_1, ..., a_n)$ - n-tka uporządkowana (wektor n-elementowy)

$A_1 \times ... \times A_n$ - iloczyn kartezjański zbiorów $A_1, ..., A_n$

$$A_1 \times ... \times A_n = \{ (a_1, ..., a_n) : a_1 \in A_1 \wedge ... \wedge a_n \in A_n \}$$

Funkcje:

$$|Q| = \begin{cases} 1, \text{ jesli zdanie Q jest prawdziwe} \\ 0, \text{ jesli zdanie Q jest falszywe} \end{cases}$$ - „wartość logiczna”,

$\lfloor x \rfloor = \max\{y \in Z : y \le x\}$ - „podłoga”; $\lceil x \rceil = \min\{y \in Z : y \ge x\}$ - „sufit”

$x \bmod y = x - y \cdot \lfloor x/y \rfloor$ - „modulo”, czyli reszta z dzielenia x przez y

<u>**Relacja binarna:**</u>

$$R \subseteq A \times B$$

(relacja dwuczłonowa w iloczynie kartezjańskim zbiorów A i B)

Relacja binarna na zbiorze A:

$$R \subseteq A \times A$$

to, że elementy a i b są ze sobą w relacji, zapisujemy:

$(a, b) \in R$ lub aRb

Dziedzina relacji $R \subseteq A \times B$:

$\{ a \in A : (\exists b \in B : (a, b) \in R) \}$ - zbiór poprzedników par należących do R

Przeciwdziedzina relacji $R \subseteq A \times B$:

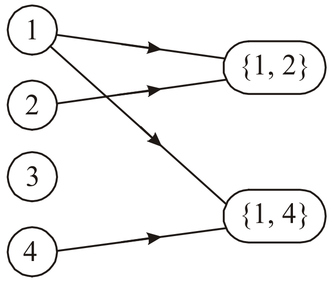
$\{ b \in B : (\exists a \in A : (a, b) \in R) \}$ - zbiór następników par należących do R

Przykład relacji

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\} \}$

R - relacja przynależności do zbioru: $R = \{ (1, \{1, 2\}), (1, \{1, 4\}), (2, \{1, 2\}), (4, \{1, 4\}) \}$

graf relacji:



tablica relacji:

	{1, 2}	{1, 4}
1	**1**	**1**
2	**1**	0
3	0	0
4	0	**1**

dziedzina relacji R : $\{ 1, 2, 4 \}$
przeciwdziedzina relacji R : $\{ \{1, 2\}, \{1, 4\} \}$

Przykład relacji

$$A = \{ 3, 5 \}, \quad B = \mathbb{N}$$

R - relacja podzielności : $a\mathrm{R}b \Leftrightarrow b \bmod a = 0$

dziedzina relacji R : $\{ 3, 5 \}$
przeciwdziedzina relacji R : zb. liczb nat. podzielnych przez 3 lub 5

Relacja (binarna) na zbiorze X jest:

- **zwrotna**, jeśli $\forall x \in X : xRx$
- **przechodnia**, jeśli $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
- **symetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$
- **antysymetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

Relację zwrotną, przechodnią i symetryczną
nazywamy relacją **<u>równoważności</u>**

typowe oznaczenie: $\approx$, np. $a \approx b$

Przykład relacji równoważności w zbiorze liczb rzeczywistych

dla $x, y \in \mathbb{R}$ relacja $x \approx y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy,
gdy $x - y \in \mathbb{Z}$ (różnica jest liczbą całkowitą)

Relację zwrotną, przechodnią i antysymetryczną
nazywamy relacją **<u>porządkującą</u>** zbiór X

typowe oznaczenie: $\leq$, np. $a \leq b$

Jeśli relacja porządkująca zbiór X spełnia dodatkowo warunek

- $\forall x, y \in X \quad x \leq y \vee y \leq x$,

to nazywana jest relacją **<u>liniowo porządkującą</u>** zbiór X

Przykłady relacji porządkujących

1. Relacja „mniejsze lub równe” ($\leq$) w zbiorze $\mathbb{R}$ (porządkuje liniowo)

2. Relacja podzielności w zbiorze $\mathbb{R}$:

$a\mathrm{R}b \Leftrightarrow a$ jest podzielnikiem b

3. Relacja zawierania ($\subseteq$) w zbiorze $\mathbb{P}(X)$

Uwaga:
relacja porządkująca nazywana jest czasami relacją częściowo porządkującą

Parę $(X, \le)$, gdzie $\le$ jest relacją (liniowo) porządkującą zbiór X, nazywamy **zbiorem** (liniowo) **uporządkowanym**

Pierwsze pytania „kombinatoryczne”:

- Ile jest relacji binarnych w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$, jeśli $|X| = n$ i $|Y| = m$?
- Ile jest relacji binarnych na zbiorze $|X| = n$?
- Ile jest zwrotnych relacji binarnych na zbiorze $|X| = n$?
- Ile jest symetrycznych relacji binarnych na zbiorze $|X| = n$?

Funkcja $\boldsymbol{f : X \to Y}$ **:** relacja $R \subseteq X \times Y$ o tej własności, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para postaci $(x, y = f(x)) \in R$

Fun(X, Y) – zbiór wszystkich funkcji z X w Y

Dla dowolnych zbiorów $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ definiujemy:

$f(A) = \{ y \in Y : \exists\, x \in A :\ y = f(x) \}$ (**obraz** zbioru A)

$f^{-1}(B) = \{ x \in X :\ f(x) \in B \}$ (**przeciwobraz** zbioru B)

- o funkcji $f : X \to Y$ mówimy, że jest „**na**” jeśli $f(X) = Y$
  Sur(X, Y) – zbiór wszystkich funkcji z X na Y (**surjekcji**)
- funkcja jest **różnowartościowa** (wzajemnie jednoznaczna), jeśli
  $\forall\, a, b \in X \quad a \ne b \ \Rightarrow\ f(a) \ne f(b)$
  Inj(X, Y) – zbiór wszystkich funkcji różnowart. z X w Y (**injekcji**)
  Bij(X, Y) – zbiór wszystkich **bijekcji** z X w Y : *Bij*(X, Y) = *Sur*(X, Y) $\cap$ *Inj*(X, Y)

FUNKCJE A ROZMIESZCZENIA

Na ile sposobów można rozmieścić pewną liczbę obiektów w określonej liczbie „pudełek” tak, aby spełnione były zadane dodatkowe ograniczenia?

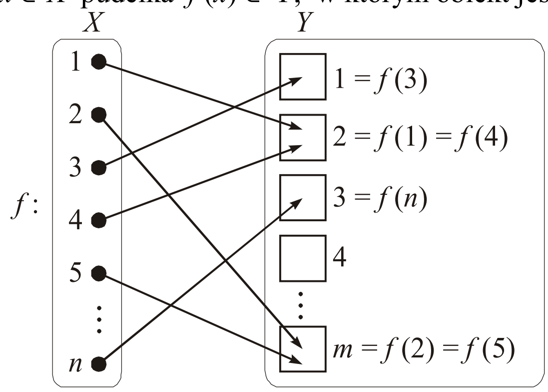
Opis formalny:

Dane są dwa zbiory X i Y o licznościach $|X| = n$ i $|Y| = m$.

Ile jest funkcji $f : X \to Y$ spełniających zadane ograniczenia?

Interpretacje:

1. X - zbiór obiektów, Y - zbiór pudełek,
   funkcja $f : X \to Y$ określa pewne rozmieszczenie obiektów w pudełkach przez wskazanie dla każdego obiektu $x \in X$ pudełka $f(x) \in Y$, w którym obiekt jest umieszczony



2. X - zbiór obiektów, Y - zbiór kolorów,
   funkcja $f : X \to Y$ określa sposób pokolorowania obiektów przez podanie dla każdego obiektu $x \in X$ koloru $f(x) \in Y$

Elementy w skończonych zbiorach X i Y można ponumerować i przyjąć, że $X = \{1, 2, ..., n\}$ i $Y = \{1, 2, ..., m\}$ W najprostszej sytuacji **nie nakładamy żadnych ograniczeń**

rozmieszczenie obiektów w pudełkach może być opisane funkcją ze zbioru *Fun*(X, Y):

Ile jest funkcji $f : X \to Y$?

Twierdzenie

Jeśli $|X| = n$ i $|Y| = m$, to liczba wszystkich funkcji
$f: X \to Y$ jest równa $\boldsymbol{m^n}$ $= |\,Fun(X, Y)\,|$

m^n

	n = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
m = 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
...										...

Jeśli nie nakładamy żadnych ograniczeń, to w jednym pudełku może znaleźć się jeden lub więcej obiektów, ale także niektóre pudełka mogą pozostać puste.

Zabrońmy tego pierwszego – nie więcej niż jeden obiekt w pudełku!

Ile jest funkcji różnowartościowych $f: X \to Y$?

Twierdzenie

Jeśli $|X| = n$, $|Y| = m$ i $n \le m$ to liczba wszystkich funkcji różnowartościowych
$f: X \to Y$ jest równa $\boldsymbol{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = m^{\underline{n}}}$ $= |\,Inj(X, Y)\,|$

$m^{\underline{n}}$

	n = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
m = 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	6	6	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	12	24	24	0	0	0	0	0	0
5	1	5	20	60	120	120	0	0	0	0	0
6	1	6	30	120	360	720	720	0	0	0	0
7	1	7	42	210	840	2520	5040	5040	0	0	0
8	1	8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320	0	0
9	1	9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880	0
10	1	10	90	720	5040	30240	151200	604800	1814400	3628800	3628800
...											...

Przyjmując formalne oznaczenie (potęgi ubywającej): $\boldsymbol{m^{\underline{n}} = m \cdot (m-1)} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{(m-n+1)}$
dookreślamy jego wartość $\boldsymbol{m^{\underline{0}} = 1}$

Jeśli $m = n$, to każda funkcja różnowartościowa $f: X \to Y$ jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru X na zbiór Y.

$m = n \Rightarrow |\,Inj(X, Y)\,| = |\,Sur(X, Y)| = |\,Bij(X, Y)|$

Przyjmujemy oznaczenie:

$$\boldsymbol{n! = n^{\underline{n}} = n \cdot (n-1)} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{1}$$

Definicja

Każde wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $f: X \to X$ (bijekcję) nazywamy **permutacją** zbioru X.

Twierdzenie

Liczba permutacji zbioru n-elementowego jest równa $\boldsymbol{n!}$

$$|\, Bij(X, X)| = n!\ , \text{ dla } |\, X\,| = n$$

ROZMIESZCZENIA UPORZĄDKOWANE

Rozmieszczamy n obiektów w m pudełkach i dodatkowo rozróżniamy uporządkowanie obiektów, które trafiły do tego samego pudełka. Dwa rozmieszczenia są identyczne, jeśli w każdym pudełku jest taka sama liczba i kolejność obiektów.

Rozważmy rozmieszczenie uporządkowane n obiektów w m pudełkach. Oznaczmy liczbę wszystkich możliwych takich rozmieszczeń przez: $\boldsymbol{m^{\overline{n}}}$ (potęga przyrastająca)

Twierdzenie

Liczba rozmieszczeń uporządkowanych n obiektów w m pudełkach jest równa

$$\boldsymbol{m^{\overline{n}} = m\cdot(m + 1)\cdot \ldots \cdot(m + n - 1)}$$

$m^{\overline{n}}$	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$m = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	
2	1	2	6	24	120	720	5040	40320	3628800	3628800	
3	1	3	12	60	360	2520	20160	181440	1814400	19958400	
4	1	4	20	120	840	6720	60480	604800	6652800	79833600	
5	1	5	30	210	1680	15120	151200	1663200	19958400	259459200	
6	1	6	42	336	3024	30240	332640	3991680	51891840	726485760	
7	1	7	56	504	5040	55440	665280	8648640	121080960	1816214400	
8	1	8	72	720	7920	95040	1235520	17297280	259459200	4151347200	
9	1	9	90	990	11880	154440	2162160	32432400	518918400	8821612800	
...											...

Przykład rozmieszczenia uporządkowanego

$X = \{$ a, b $\}$, $|\,X\,| = 2$, $|\,Y\,| = 3$

1.	1 a b	2	3	*7.*	1	2 a	3 b
2.	1 b a	2	3	*8.*	1	2 b	3 a
3.	1 a	2 b	3	*9.*	1	2 a b	3
4.	1 b	2 a	3	*10.*	1	2 b a	3
5.	1 a	2	3 b	*11.*	1	2	3 a b
6.	1 b	2	3 a	*12.*	1	2	3 b a

$$3^{\overline{2}} = 3 \cdot 4 = 12$$

Prawdziwe są następujące tożsamości:

$$m^{\underline{n}} = m^{\underline{n-1}}\,(m - n + 1)$$
$$m^{\underline{n}} = m \cdot (m - 1)^{\underline{n-1}}$$
$$m^{\underline{n}} = \frac{m!}{(m-n)!}$$
$$m^{\overline{n}} = m^{\overline{n-1}}\,(m + n - 1)$$
$$m^{\overline{n}} = m \cdot (m + 1)^{\overline{n-1}}$$
$$m^{\overline{n}} = (m + n - 1)^{\underline{n}}$$