ELEMENTY TEORII GRAFÓW

Literatura:

- N.Deo *„Teoria grafów i jej zastosowania..."* PWN (1980)
- Ross, Wright *„Matematyka dyskretna"* PWN (1996)
- R.Wilson *„Wprowadzenie do teorii grafów"* PWN (1999)
- J.Kulikowski *„Zarys teorii grafów"* PWN (1986)

GRAFY – podstawowe definicje

Graf: $G = (V, E)$

$V = \{1, 2, ..., n\}$ - zbiór wierzchołków grafu

$E \subseteq \{\{i, j\} : i \neq j \text{ i } i, j \in V\}$ - zbiór krawędzi grafu

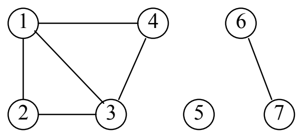
Terminologia: graf = graf symetryczny, graf nieskierowany, graf niezorientowany

Rysunek grafu:

- wierzchołek i przedstawiamy symbolicznie i
- krawędź $\{i, j\}$ przedstawiamy jako odcinek łączący dwa wierzchołki i — j

Przykład grafu i jego rysunku

$G = (V, E)$:



$V = \{1, ..., 7\}$,

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}$

Graf skierowany: $G = (V, A)$

$V = \{1, 2, ..., n\}$ - zbiór wierzchołków grafu

$A \subseteq V \times V$ - zbiór łuków grafu

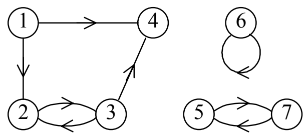
Terminologia: graf skierowany = digraf, graf zorientowany

Rysunek grafu skierowanego:

- wierzchołek i przedstawiamy symbolicznie i
- łuk (i, j) przedstawiamy jako odcinek skierowany od jednego wierzchołka do drugiego $i \longrightarrow j$

Przykład grafu skierowanego i jego rysunku

$G = (V, A)$:



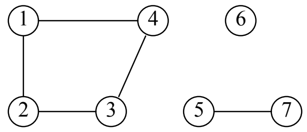
$V = \{1, ..., 7\}$,

$A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (5, 7), (7, 5), (6, 6)\}$

Dla grafu skierowanego $G = (V, A)$ definiujemy ***pochodny*** graf nieskierowany $G' = (V, E)$:

$$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow (i, j) \in A \vee (j, i) \in A, \; i \neq j$$

Przykład grafu pochodnego



$V = \{ 1, ..., 7 \}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$

Związek grafów z relacjami

- Dla grafu skierowanego $G = (V, A)$: A – relacja na zbiorze V
- Dla grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$:
  E może wynikać z relacji R na zbiorze V, która jest ona symetryczna i nie jest zwrotna:
  $(i, j) \in R \vee (j, i) \in R \Rightarrow \{ \text{i}, \text{j} \} \in E$

STOPNIE WIERZCHOŁKÓW

Graf (nieskierowany)

dla $G = (V, E)$ i jego krawędzi $e = \{ i, j\} \in E$ mówimy, że wierzchołki i, j są ***incydentne*** z krawędzią e (krawędź e łączy dwa wierzchołki i, j).
Wierzchołki incydentne z daną krawędzią nazywamy wierzchołkami ***sąsiednimi***.

$V(i)$ – zbiór wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem i : $V(i) = \{ j\in V : \{i, j\}\in E \}$

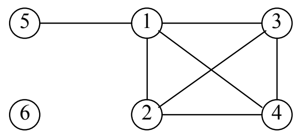
$d(i) = | V(i) |$ – ***stopień*** wierzchołka i (inne stosowane oznaczenie deg(i))

Wierzchołek stopnia 0 nazywamy wierzchołkiem ***izolowanym***.

Dla podzbioru $M \subseteq V$ definiujemy: $V_M(i) = \{ j\in M : \{i, j\}\in E \}$

$d_M(i) = | V_M(i) |$ – ***stopień*** wierzchołka i względem podzbioru M

Przykład wyznaczania stopni wierzchołków w grafie



$V(1) = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow d(1) = 4$; $V(4) = \{1, 2, 3\} \Rightarrow d(4) = 3$;
$V(6) = \varnothing \Rightarrow d(6) = 0$ (wierzchołek izolowany)
dla $M = \{3, 4\}$: $d_M(1) = 2$, $d_M(4) = 1$, $d_M(5) = 0$

Graf skierowany

dla $G = (V, A)$ i jego łuku $a = (i, j) \in A$ mówimy, że wierzchołki i, j są ***incydentne*** z łukiem a (łuk a prowadzi z wierzchołka i do j).
Wierzchołki incydentne z danym łukiem nazywamy odpowiednio jego ***początkiem*** (i) i **końcem** (j)

$V^+(i)$ – zbiór końców łuków wychodzących z wierzchołka i : $V^+(i) = \{ j\in V : (i, j)\in A \}$

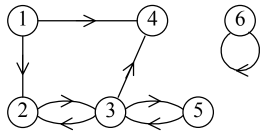
$V^-(i)$ – zbiór początków łuków wchodzących do wierzchołka i : $V^-(i) = \{ j\in V : (j, i)\in A \}$
$d^+(i) = | V^+(i) |$ – ***stopień wyjściowy*** wierzchołka i
$d^-(i) = | V^-(i) |$ – ***stopień wejściowy*** wierzchołka i
$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$ – ***stopień*** wierzchołka i
Dla podzbioru $M \subseteq V$ definiujemy: $V_M^+(i) = \{ j\in M : (i, j) \in A \}$ $V_M^-(i) = \{ j\in M : \{j, i\}\in A \}$

$d_M^+(i) = |V_M^+(i)|$ – ***stopień wyjściowy*** wierzchołka i względem M

$d_M^-(i) = |V_M^-(i)|$ – ***stopień wejściowy*** wierzchołka i względem M

$d_M(i) = d_M^+(i) + d_M^-(i)$ – ***stopień*** wierzchołka i względem M

Przykład wyznaczania stopni wierzchołków w grafie skierowanym



$V^+(3) = \{2, 4, 5\} \Rightarrow d^+(3) = 3$; $V^-(3) = \{2, 5\} \Rightarrow d^-(3) = 2$; $d(3) = 5$

$V^+(6) = \{6\} \Rightarrow d^+(3) = 1$; $V^-(6) = \{6\} \Rightarrow d^-(6) = 1$; $d(6) = 2$

dla $M = \{2, 4\}$: $d_M^+(3) = 2$, $d_M^-(3) = 1$, $d_M(3) = 3$

<u>Twierdzenie</u> (lemat o uściskach dłoni)

Dla dowolnego grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$ zachodzi $\sum_{i \in V} d(i) = 2|E|$

<u>Twierdzenie</u>

Dla dowolnego grafu skierowanego $G = (V, A)$ zachodzi $\sum_{i \in V} d^-(i) = \sum_{i \in V} d^+(i) = |A|$

MACIERZ INCYDENCJI

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, ..., n\}$, zbiór krawędzi $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\} \subseteq \{\{i, j\}: \text{i, j} \in V\}$

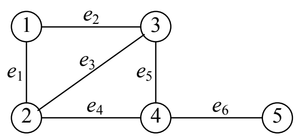
Macierz incydencji grafu: $I_E = [a_{ij} : i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m]$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } i \in e_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy incydencji

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



$$I_E = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{r} \\ d(1) = 2 \\ d(2) = 3 \\ d(3) = 3 \\ d(4) = 3 \\ d(5) = 1 \\ \Sigma\, d = 12 \end{array}$$

Graf skierowany (bez pętli) $G = (V, A)$

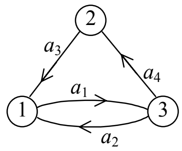
zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, ..., n\}$, zbiór krawędzi $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \subseteq V \times V$

Macierz incydencji grafu skierowanego bez pętli: $I_A = [a_{ij} : i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m]$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jesli } a_j = (k, i) \\ 1 & \text{jesli } a_j = (i, k) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy incydencji

$V = \{ 1, 2, 3 \}$, $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2)\}$



$$\mathrm{I}_A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$d^+(1) = 1$, $d^-(1) = 2$, $d(1) = 3$
$d^+(2) = 1$, $d^-(2) = 1$, $d(2) = 2$
$d^+(3) = 2$, $d^-(3) = 1$, $d(3) = 3$
$\Sigma\, d^+ = 4$, $\Sigma\, d^- = 4$, $\Sigma\, d = 8$

Twierdzenie (raz jeszcze)

Dla grafu (nieskierowanego) zachodzi: $\sum_{i\in V} d(i) = 2|E|$

Dla grafu skierowanego zachodzi: $\sum_{i\in V} d^-(i) = \sum_{i\in V} d^+(i) = |A|$

Dowód

Wystarczy policzyć sumy niezerowych elementów o jednakowych znakach w odpowiednich macierzach incydencji ■

Wniosek

W dowolnym grafie skierowanym lub nieskierowanym liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta

MACIERZ SĄSIEDZTWA WIERZCHOŁKÓW

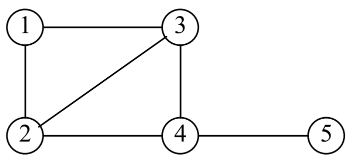
Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$, $V = \{ 1, 2, ..., n \}$

Macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu: $\mathrm{B}_E = [\, b_{ij} : i = 1, ..., n\,,\ j = 1, ..., n\,]$

$$b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy sąsiedztwa wierzchołków

$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$



$$\mathrm{B}_E = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} d(1) = 2 & d(2) = 3 & d(3) = 3 & d(4) = 3 & d(5) = 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ d(1) = 2 \\ d(2) = 3 \\ d(3) = 3 \\ d(4) = 3 \\ d(5) = 1 \\ \\ \end{array}$$

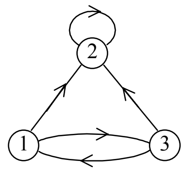
Graf skierowany $G = (V, A)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$

Macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu: $B_A = [\, b_{ij} : i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n \,]$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } (i, j) \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy sąsiedztwa wierzchołków

$V = \{1, 2, 3\}$



$$B_A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} d^+(1) = 2 \\ d^+(2) = 1 \\ d^+(3) = 2 \end{array}$$

$$d^-(1) = 1 \qquad d^-(2) = 3 \qquad d^-(3) = 1$$

TYPY GRAFÓW

Definicja

Dwa grafy (nieskierowane) $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ są ***izomorficzne***, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $f : V \xrightarrow{1-1} V'$, takie że dla dowolnej pary wierzchołków $i, j \in V$ zachodzi

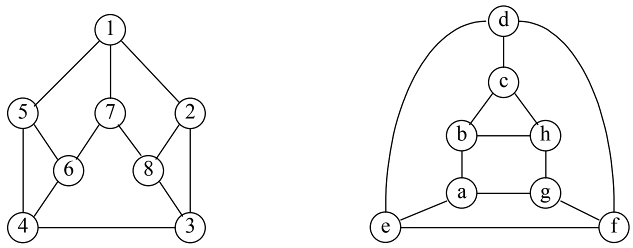
$$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow \{f(i), f(j)\} \in E'$$

Dla grafów skierowanych $G = (V, A)$ i $G' = (V', A')$ warunek ma postać

$$(i, j) \in A \Leftrightarrow (f(i), f(j)) \in A'$$

Izomorfizm grafów zapisujemy: $G \cong G'$

Przykład grafów izomorficznych



Odwzorowanie wykazujące izomorficzność:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(i)$	a	b	c	d	e	f	g	h

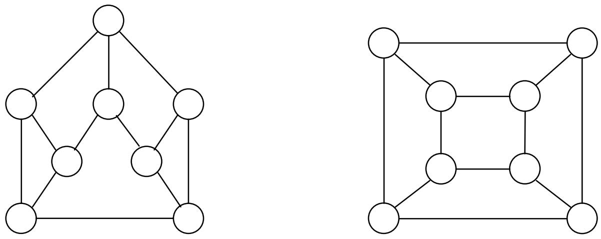
Definicja

Graf nazywamy ***regularnym***, jeśli wszystkie wierzchołki maja ten sam stopień.

Uwaga

Dwa grafy regularne o tej samej liczbie wierzchołków i tym samym stopniu wierzchołków nie muszą być izomorficzne.

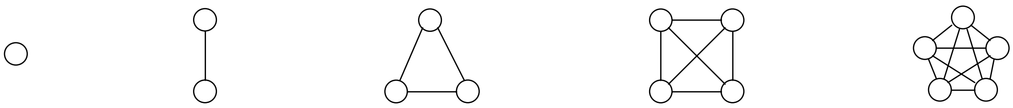
Przykład ilustrujący uwagę



Definicja

Graf nazywamy ***pełnym***, jeśli dla każdej pary wierzchołków istnieje krawędź łącząca te wierzchołki.

Symboliczne oznaczenie grafu pełnego o n wierzchołkach – $\mathbf{K}_{n}$



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Definicja

Graf nazywamy ***dwudzielnym***, jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory, tak że żadne dwa wierzchołki należące do tego samego podzbioru nie są sąsiednie.
$G = (V_1 \cup V_2 , E)$ $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

Definicja

Graf $G = (V_1 \cup V_2 , E)$ nazywamy ***pełnym grafem dwudzielnym***, jeśli jest dwudzielny i zawiera wszystkie krawędzie łączące wierzchołki ze zbioru V_1 z wierzchołkami ze zbioru V_2.

Oznaczenie pełnego grafu dwudzielnego – $\mathbf{K}_{r,\,s}$

Przykłady pełnych grafów dwudzielnych

$K_{2,\,3}$ $K_{1,\,5}$

Definicja

Podgrafem grafu $G = (V, E)$
nazywamy dowolny graf $G' = (V', E')$, dla którego $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$.

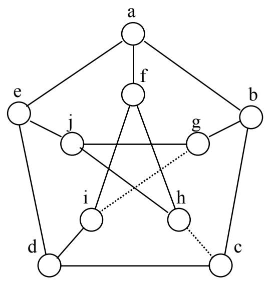
Graf jest ***planarny*** (płaski), jeśli można go narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi.

Twierdzenie (Kuratowski, 1930)

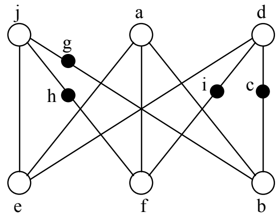
Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu, który można otrzymać z grafów K_5 lub $K_{3,\,3}$ przez podział krawędzi (czyli wprowadzenie dodatkowych wierzchołków stopnia 2).

Przykłady zastosowania twierdzenia Kuratowskiego do stwierdzenia nieplanarności

Graf Petersena



$\cong$



$\Rightarrow$ graf Petersena nie jest planarny