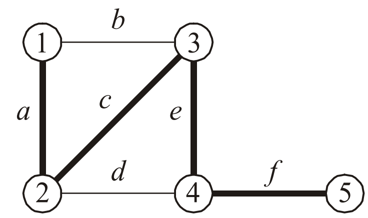
DROGI i CYKLE w grafach

Dla grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$ **drogą z wierzchołka $v_0 \in V$ do $v_t \in V$** nazywamy ciąg (naprzemienny) wierzchołków i krawędzi grafu: $(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{t-1}, e_t, v_t)$, spełniający warunek $e_i = \{ v_{i-1}, v_i \}$ dla $i = 1, ..., t$

Przykład drogi w grafie



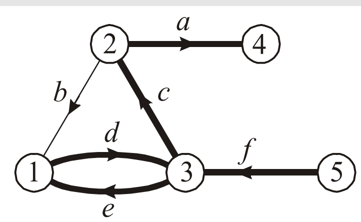
droga: $(1, a, 2, c, 3, e, 4, f, 5)$, $t = 4$

wierzchołek v_0 nazywamy ***początkiem*** drogi,
wierzchołek v_t nazywamy ***końcem*** drogi,
liczbę t nazywamy ***długością*** drogi

Drogę można utożsamiać dla uproszczenia z ciągiem wierzchołków sąsiednich $(v_0, v_1, ..., v_t)$ lub ciągiem krawędzi zależnych $(e_1, ..., e_t)$

Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$ **drogą z wierzchołka $v_0 \in V$ do $v_t \in V$** nazywamy ciąg (naprzemienny) wierzchołków i łuków grafu: $(v_0, a_1, v_1, a_2, ..., v_{t-1}, a_t, v_t)$, spełniający warunek $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ dla $i = 1, ..., t$

Przykład drogi w grafie skierowanym

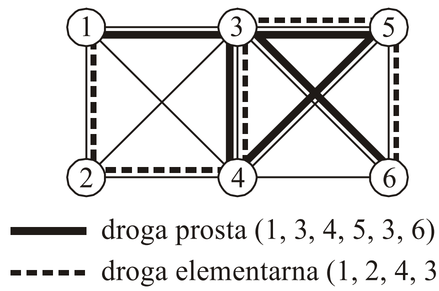


droga $(5, f, 3, e, 1, d, 3, c, 2, a, 4)$, $t = 5$

Drogę w grafie skierowanym można utożsamiać dla uproszczenia z ciągiem odpowiednio skierowanych łuków zależnych $(e_1, ..., e_t)$

droga prosta - droga, w której wszystkie krawędzie (łuki) w ciągu są różne
droga elementarna - droga, w której wszystkie wierzchołki w ciągu są różne

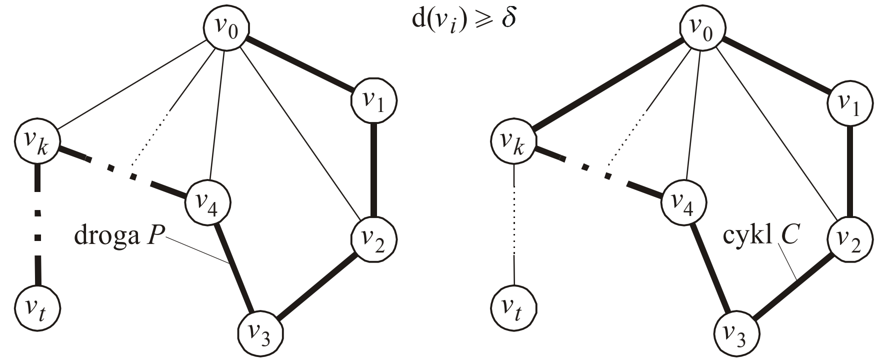
Przykłady dróg w grafie



Cyklem nazywamy drogę, dla której $v_0 = v_t$ (droga zamknięta) i $t > 0$
Cyklem elementarnym nazywamy cykl, w którym wierzchołki $v_1, v_2, ..., v_{t-1}$ są różne

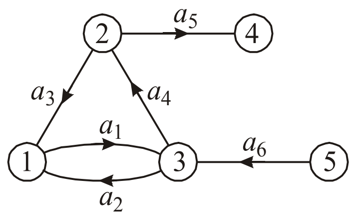
Twierdzenie (Dirac, 1952)
Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem, w którym minimalny stopień wierzchołka jest równy δ, to
- w grafie G istnieje droga elementarna o długości co najmniej δ,
- dla $\delta \geq 2$ w grafie G istnieje cykl elementarny o długości co najmniej $\delta + 1$

Dowód

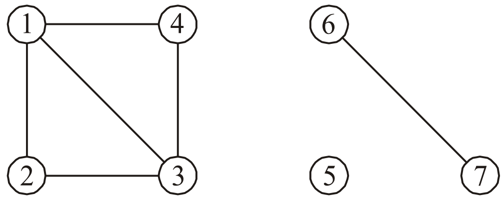


Niech $P = (v_0, v_1, ..., v_t)$ będzie drogą elementarną w grafie G o maksymalnej długości (tzn. nie można jej przedłużyć na żadnym końcu). Wówczas wszystkie wierzchołki sąsiednie z v_0 muszą należeć do P.
Niech $k = \max \{ i : \{v_0, v_i\} \in E \}$.
Z założenia o maksymalnej długości drogi wynika, że $k \geq d(v_0) \geq \delta$. Zatem droga P ma długość co najmniej δ.
Ponadto, jeśli $\delta \geq 2$, to $C = (v_0, v_1, ..., v_k, v_0)$ jest cyklem elementarnym o długości co najmniej $\delta + 1$. ■
Graf (nieskierowany) nazywamy ***spójnym***, jeśli dla <u>każdej</u> pary wierzchołków u i v istnieje w nim droga z u do v.
Graf skierowany jest ***spójny*** (*słabo spójny*), jeśli jego pochodny graf nieskierowny jest spójny.
Graf skierowany jest ***silnie spójny***, jeśli dla <u>każdej</u> pary wierzchołków u i v istnieje w nim droga z u do v.
Składową spójną grafu nazywamy jego podgraf, który jest spójny i nie jest podgrafem innego grafu spójnego.

Przykład skierowanego grafu spójnego, ale nie silnie spójnego



Przykład grafu o 3 składowych spójnych



Twierdzenie
Dla grafu o n wierzchołkach i k składowych spójnych liczba krawędzi m jest ograniczona przez nierówność:
$$(n-k) \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

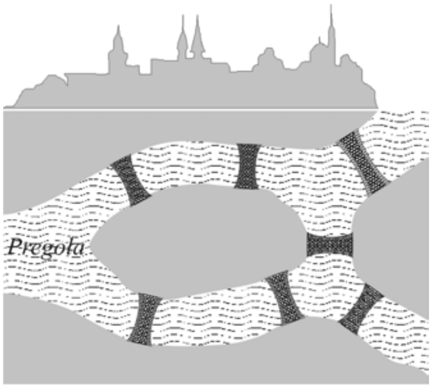
Wniosek

W grafie spójnym liczba krawędzi m spełnia nierówność: $(n-1) \leq m \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$

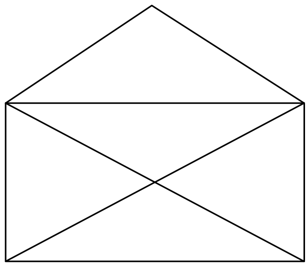
Uwaga

- dla grafu pełnego K_n : $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- dla drzewa : $m = n - 1$

DROGI i CYKLE EULERA w grafach



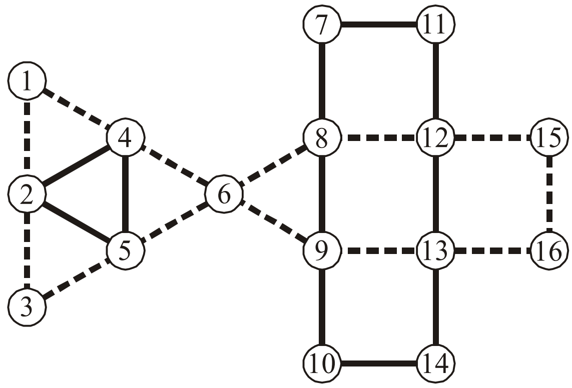
*Czy istnieje droga spaceru przechodząca przez wszystkie mosty
w Królewcu dokładnie jeden raz?*



*Czy można narysować tę figurę nie odrywając ołówka od papieru
i nie rysując dwukrotnie żadnego odcinka?*

Drogą Eulera w grafie nazywamy taką drogę prostą, która zawiera wszystkie krawędzie grafu.
Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę Eulera.

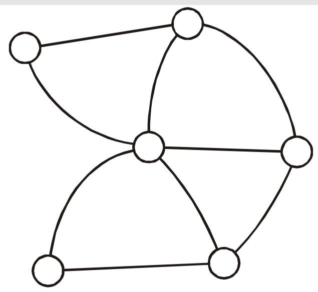
Twierdzenie (Euler, 1736)
Graf spójny G ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.
Dowód
($\Rightarrow$) Załóżmy, że graf ma cykl Eulera. Jeśli będziemy przechodzili wzdłuż krawędzi tego cyklu, usuwając je po przejściu, to w każdym przechodzonym wierzchołku stopień będzie malał o 2. Ponieważ ten cykl zawiera wszystkie krawędzie grafu dokładnie raz, to po przejściu całego cyklu wszystkie wierzchołki będą stopnia 0. Zatem na początku wszystkie musiały mieć stopień parzysty.
($\Leftarrow$) *Indukcja względem liczby krawędzi m.*
Dla $m = 3$ twierdzenie oczywiście zachodzi.
Rozważmy graf o $m > 3$, zakładając, że każdy graf o mniejszej liczbie krawędzi ma cykl Eulera.
Ze spójności grafu i parzystości stopni wierzchołków wynika, że minimalny stopień wierzchołka jest równy 2. Zatem graf musi zawierać cykl prosty o długości co najmniej 3. Wybierzmy taki i oznaczmy go przez C. Jeśli cykl C zawiera każdą krawędź grafu, to dowód jest zakończony.
Jeśli nie, to usuwamy z grafu krawędzie należące do C. Powstaje podgraf H, który ma mniej krawędzi niż G (może nie być spójny), ale nadal każdy wierzchołek ma w nim stopień parzysty. Na mocy założenie indukcyjnego w każdej składowej spójnej podgrafu H istnieje cykl Eulera. Ponadto ze spójności grafu G wynika, że każda składowa podgrafu H ma wierzchołek wspólny z cyklem C. Zatem cykl Eulera w grafie G można skonstruować przechodząc kolejne krawędzie cyklu C w ustalonym kierunku od wybranego wierzchołka początkowego i włączając do drogi cykle Eulera w napotkanych składowych spójnych podgrafu H. W każdym wierzchołku, który nie jest w H wierzchołkiem izolowanym, przechodzimy krawędzie cyklu Eulera w tej składowej podgrafu H, która zawiera ten wierzchołek. Po obejściu cyklu Eulera w składowej podgrafu H kontynuujemy poruszanie się wzdłuż cyklu C i wracamy na końcu do wierzchołka początkowego. Obchodzimy w ten sposób dokładnie jeden raz wszystkie krawędzie grafu G. ■



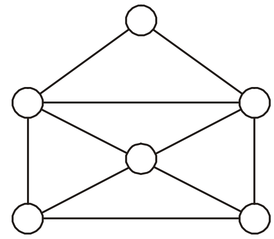
Wniosek

Graf spójny, mający nie więcej niż dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, ma drogę Eulera.

Przykłady



nie istnieje droga Eulera



istnieje droga, nie ma cyklu

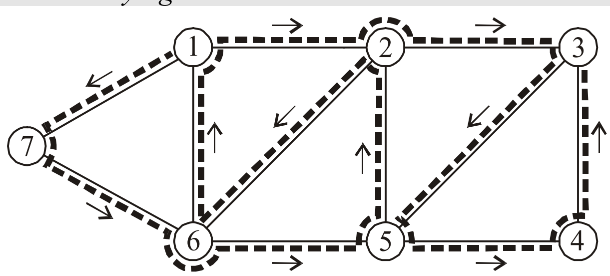
Mostem nazywamy taką krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę składowych spójnych tego grafu.

Algorytm wyznaczania drogi Eulera (Fleury)

Budujemy ciąg krawędzi grafu (drogę).

1. Wybierz dowolny wierzchołek v o nieparzystym stopniu, o ile taki istnieje. W przeciwnym przypadku wybierz dowolny wierzchołek $\boldsymbol{v}$;
2. Dopóki są w grafie krawędzie incydentne z $\boldsymbol{v}$ wykonuj:
   2.1. Jeśli jest dokładnie jedna krawędź incydentna z $\boldsymbol{v}$ - $\{v, w\}$, to podstaw $\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{w}$, wstaw tę krawędź jako kolejny wyraz ciągu i usuń ją z grafu;
   2.2. Jeśli istnieje więcej niż jedna krawędź incydentna z v, to wybierz dowolną krawędź $\{v, w\}$, która nie jest mostem, podstaw $\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{w}$, wstaw tę krawędź jako kolejny wyraz ciągu i usuń ją z grafu;
3. Jeśli ciąg zawiera wszystkie krawędzie grafu, to została wyznaczona w nim droga Eulera, a jeśli nie, to graf nie był spójny.

Przykład działania algorytmu Fleury'ego



Twierdzenie

Graf skierowany spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v zachodzi $d^+(v) = d^-(v)$.

Grafy, w których istnieje cykl Eulera nazywamy ***grafami eulerowskimi***, a takie, w których istnieje droga Eulera nazywamy ***półeulerowskimi***.

DROGI i CYKLE HAMILTONA w grafach

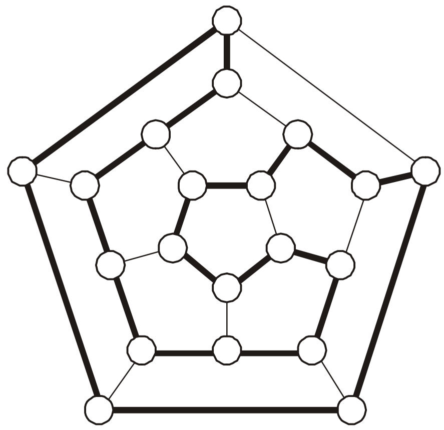
Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

Drogą Hamiltona w grafie G nazywamy taką drogę elementarną, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu.

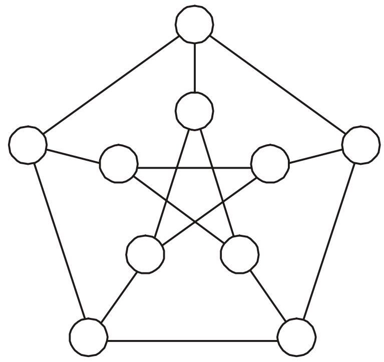
Cyklem Hamiltona w grafie G nazywamy taki cykl elementarny, który zawiera wszystkie wierzchołki grafu (zamknięta droga Hamiltona). Długość cyklu Hamiltona jest równa $|V|$.

Graf, w którym istnieje cykl Hamiltona nazywamy ***grafem hamiltonowskim***.

Przykłady



graf dwunastościanu jest hamiltonowski

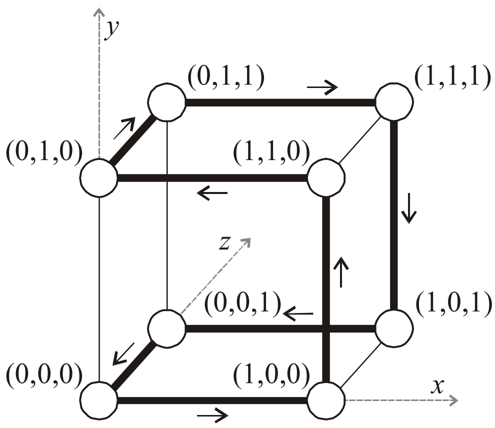


graf Petersena nie jest hamiltonowski

Przykład cyklu Hamiltona w grafie sześcianu (*związek z kodem Graya*)

Kod Graya rzędu trzeciego (n =3):

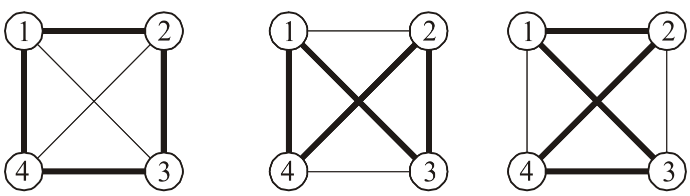
(0,0,0) (1,0,0) (1,1,0) (0,1,0) (0,1,1) (1,1,1) (1,0,1) (0,0,1)



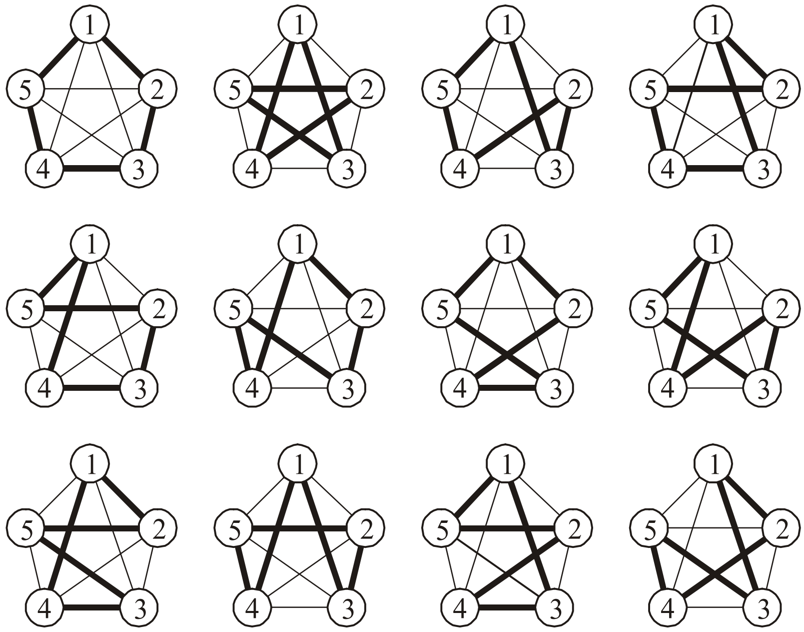
(nadawanie etykiet procesorom połączonym w hiperkostkę)

Graf pełny K_n jest hamiltonowski dla każdego $n \geq 3$ i zawiera $\dfrac{(n-1)!}{2}$ cykli Hamiltona

Przykład cykli Hamiltona w grafie K_4 i K_5



K_4: $\dfrac{(4-1)!}{2} = 3$



K_5: $\dfrac{(5-1)!}{2} = 12$

Twierdzenie

Dla każdego grafu dwudzielnego $G = (V_1 \cup V_2, E)$ zachodzi:

- jeśli G ma cykl Hamiltona, to $|V_1| = |V_2|$,
- jeśli G ma drogę Hamiltona, to $||V_1| - |V_2|| \leq 1$.

Dla każdego pełnego grafu dwudzielnego, w którym $|V_1 \cup V_2| \geq 3$ zachodzi:

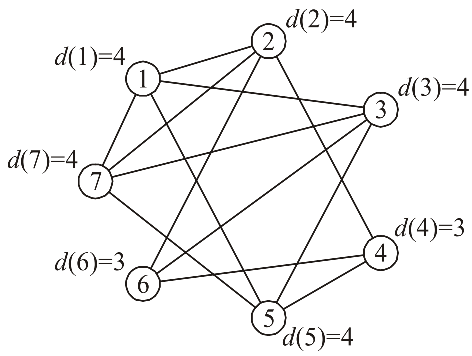
- jeśli $|V_1| = |V_2|$, to G ma cykl Hamiltona,
- jeśli $||V_1| - |V_2|| \leq 1$, to G ma drogę Hamiltona.

Warunki dostateczne istnienia cykli Hamiltona

Twierdzenie (Ore, 1960)

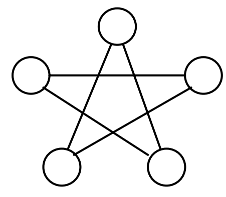
Graf (nieskierowany) o n wierzchołkach dla $n \geq 3$, w którym
$d(v) + d(w) \geq n$ dla każdej pary wierzchołków v i w niepołączonych krawędzią (niezależnych), jest hamiltonowski

Przykład grafu hamiltonowskiego spełniającego warunek Ore



Najniższy stopień mają wierzchołki 4 i 6.
Dla wierzchołków niezależnych z 4: $d(v) + d(4) = 7 = n$
Dla wierzchołków niezależnych z 6: $d(v) + d(6) = 7 = n$

Przykład grafu hamiltonowskiego, w którym warunek Ore nie jest spełniony

Dla grafu:  zachodzi $d(v) + d(w) = 4 < 5 = n$ dla każdej pary wierzchołków v i w niepołączonych krawędzią, a cykl Hamiltona oczywiście w nim istnieje.

Wniosek (twierdzenie Diraca, 1952)

Jeśli graf (nieskierowany) ma $n \geq 3$ wierzchołków i $\mathrm{d}(v) \geq \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka, to graf ten jest hamiltonowski.

Dowód

$$\forall v \in V:\ \mathrm{d}(v) \geq \frac{n}{2} \ \Rightarrow\ \forall u, w \in V:\ \mathrm{d}(u) + \mathrm{d}(w) \geq n$$ ■

Wniosek

Jeśli graf ma $n \geq 3$ wierzchołków i co najmniej $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi, to jest hamiltonowski.

Dowód

Załóżmy, że graf $G = (V, E)$ ma $|E| = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi. Wybierzmy $u, v \in V$ takie, że $\{u, v\} \notin E$ i usuńmy z grafu wierzchołki u i v oraz wszystkie krawędzie z nimi incydentne.
Zatem usunęliśmy $\mathrm{d}(u) + \mathrm{d}(v)$ krawędzi i 2 wierzchołki.

Otrzymany podgraf $G' = (V', E')$ jest podgrafem K_{n-2}, a zatem ma nie więcej niż $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ krawędzi.

Mamy więc: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - \mathrm{d}(u) - \mathrm{d}(v) \leq |E'| \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Stąd $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 2 = n \leq \mathrm{d}(u) + \mathrm{d}(v)$ i spełnione są założenia twierdzenia Ore. ■