DROGI i CYKLE HAMILTONA w grafach skierowanych

Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$

drogą z wierzchołka $\boldsymbol{v_0 \in V}$ ***do*** $\boldsymbol{v_t \in V}$ nazywamy ciąg (naprzemienny) wierzchołków i łuków grafu:

$$(v_0, a_1, v_1, a_2, ..., v_{t-1}, a_t, v_t),$$

spełniający warunek $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ dla $i = 1, ..., t$

- drogę nazywamy ***elementarną*** jeśli wszystkie wierzchołki w ciągu są różne,
- ***cyklem*** nazywamy drogę, dla której $\boldsymbol{v_0 = v_t}$ (droga zamknięta),
- drogę elementarną, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu nazywamy ***drogą Hamiltona***,
- drogę można utożsamiać dla uproszczenia z ciągiem łuków zależnych $(a_1, ..., a_t)$ lub wierzchołków sąsiednich $(v_0, v_1, ..., v_t)$.

Twierdzenie (Nash, Williams, 1969)

Jeśli D jest grafem skierowanym bez pętli, w którym $d^+(v) \ge \frac{n}{2}$ i $d^-(v) \ge \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka v, to w D istnieje cykl Hamiltona.

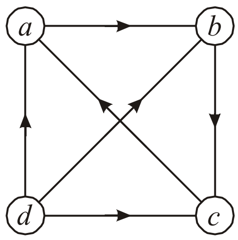
Twierdzenie (Meyniel, 1973)

Jeśli D jest silnie spójnym grafem skierowanym bez pętli o $n \ge 2$ wierzchołkach i dla dowolnej pary wierzchołków, niepołączonych krawędzią (niezależnych) zachodzi warunek $d(v) + d(w) \ge 2n - 1$, to w D istnieje cykl Hamiltona.

Graf skierowany bez pętli nazywamy ***turniejem***, jeśli dla każdej pary wierzchołków u i v zawiera on dokładnie jeden łuk: albo (u, v), albo (v, u).

- turniej może reprezentować wyniki spotkań par uczestniczących w rozgrywkach typu „każdy z każdym" (bez remisów)

Przykład turnieju



Uwaga: ten turniej nie jest silnie spójny (nie ma np. drogi z b do d)

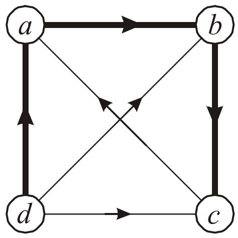
Twierdzenie (Rédei, 1934)

Każdy turniej zawiera drogę Hamiltona.

Twierdzenie (Thomassen, 1982) – uzupełnienie tw. Rédei

W turnieju droga Hamiltona zaczyna się w wierzchołku, który ma najwyższy stopień wyjściowy, i kończy się w wierzchołku, który ma najwyższy stopień wejściowy.

Przykład drogi Hamiltona w turnieju

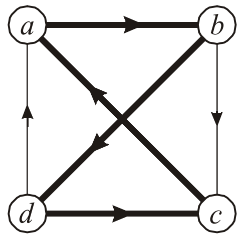


drogi Hamiltona: (d, a, b, c), (d, b, c, a) i (d, c, a, b)

Twierdzenie (Camion, 1959)

Każdy silnie spójny turniej zawiera cykl Hamiltona.

Przykład cyklu Hamiltona w turnieju



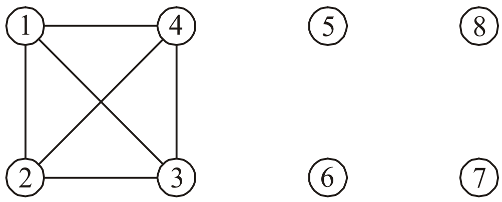
cykl Hamiltona: (a, b, d, c, a)

SPÓJNOŚĆ grafu

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$ jest ***spójny***, jeśli dla każdej pary wierzchołków istnieje droga łącząca te wierzchołki;
graf spójny ma jedną składową spójną (tożsamą z tym grafem), a graf niespójny ma co najmniej dwie składowe spójne.

Twierdzenie
Jeśli graf G ma n wierzchołków i k składowych spójnych, to liczba jego krawędzi m spełnia nierówności: $n - k \le m \le \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{2}$

Przykład grafu niespójnego o maksymalnej liczbie krawędzi



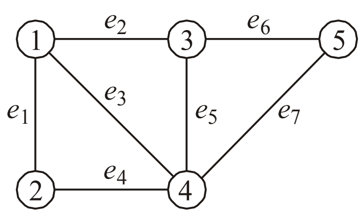
dla $n = 8$ i $k = 5$ maksymalna liczba krawędzi wynosi $m = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Wniosek

Każdy graf o n wierzchołkach i ponad $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędziach jest spójny.

Zbiorem rozspajającym graf spójny G nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.
Minimalnym zbiorem rozspajającym (*rozcięciem*) grafu G nazywamy taki zbiór rozspajający, dla którego żaden z jego podzbiorów właściwych nie jest zbiorem rozspajającym.

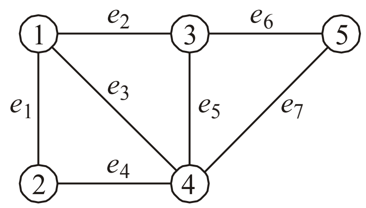
Przykład zbiorów rozspajających



$\{ e_1, e_3, e_4 \}$ - zbiór rozspajający,
$\{ e_1, e_4 \}$ i $\{ e_2, e_3, e_4 \}$ - minimalne zbiory rozspajające

Spójnością krawędziową $\boldsymbol{\lambda(G)}$ grafu spójnego G nazywamy najmniejszą moc jego zbioru rozspajającego.
Graf nazywamy ***k-spójnym krawędziowo***, jeśli $\lambda(G) \ge k$

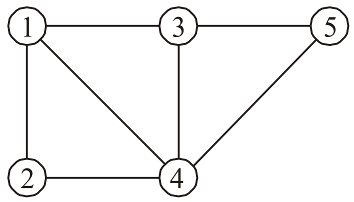
Przykład



$\lambda(G) = 2$, graf 2-spójny krawędziowo

Zbiorem rozdzielającym graf spójny G nazywamy taki podzbiór jego wierzchołków, którego usunięcie pozbawia ten graf spójności.
Minimalnym zbiorem rozdzielającym grafu G nazywamy taki zbiór rozdzielający, dla którego żaden z jego podzbiorów właściwych nie jest zbiorem rozdzielającym.
Spójnością wierzchołkową $\kappa(G)$ grafu spójnego G nazywamy najmniejszą moc jego zbioru rozdzielającego.
Graf nazywamy ***k-spójnym*** (*wierzchołkowo*), jeśli $\kappa(G) \geq k$

Przykład zbioru rozdzielającego



{ 1, 3, 4 } - zbiór rozdzielający,
{ 1, 4 } i {3, 4 } - minimalne zbiory rozdzielające

$\kappa(G) = 2$, graf 2-spójny (wierzchołkowo)

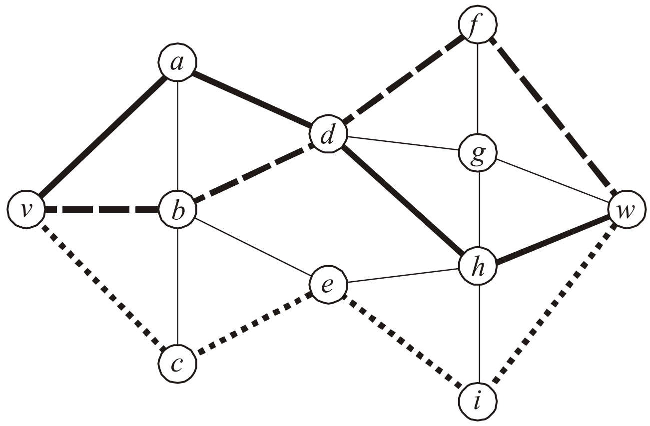
Twierdzenie
Dla każdego spójnego grafu G zachodzi nierówność $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Dowód
Ze zbioru wierzchołków incydentnych z rozcięciem o najmniejszej mocy usuwamy jeden wierzchołek z każdej pary wierzchołków sąsiednich. Powstaje zbiór rozdzielający graf G o mocy nie większej niż $\lambda(G)$. ■

Rozważmy graf spójny $G = (V, E)$ oraz parę wyróżnionych wierzchołków $v, w \in V$ ($v \neq w$):

- dwie drogi z v do w nazywamy ***krawędziowo rozłącznymi***, jeśli nie mają one wspólnych krawędzi,
- dwie drogi z v do w nazywamy ***wierzchołkowo rozłącznymi***, jeśli nie mają one wspólnych wierzchołków (z wyjątkiem v i w).
- ***zbiorem rozspajającym wierzchołki*** v i w nazywamy taki podzbiór krawędzi grafu, że każda droga łącząca wierzchołki v i w zawiera krawędź z tego podzbioru.
- ***zbiorem rozdzielającym wierzchołki*** v i w nazywamy taki podzbiór wierzchołków należących do $V \setminus \{v, w\}$, że każda droga łącząca wierzchołki v i w zawiera wierzchołek z tego podzbioru.

Przykłady dróg rozłącznych i zbiorów rozspajających i rozdzielających



(v, a, d, h, w) i (v, b, d, f, w) - drogi rozłączne krawędziowo,
(v, a, d, h, w) i (v, c, e, i, w) - drogi rozłączne wierzchołkowo,
$\{\{a, d\}, \{b, d\}, \{e, h\}, \{e, i\}\}$ i $\{\{v, a\}, \{v, b\}, \{v, c\}\}$ - zbiory rozspajające v i w
$\{ d, e \}$ i $\{ a, b, h, i \}$ - zbiory rozdzielające v i w

Twierdzenie (Mengera w wersji krawędziowej)
Maksymalna liczba dróg krawędziowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym v i w.

Twierdzenie (Mengera w wersji wierzchołkowej, Menger 1927)
Maksymalna liczba dróg wierzchołkowo rozłącznych, łączących dwa różne wierzchołki niesąsiednie v i w w grafie spójnym G, jest równa minimalnej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdzielającym v i w.

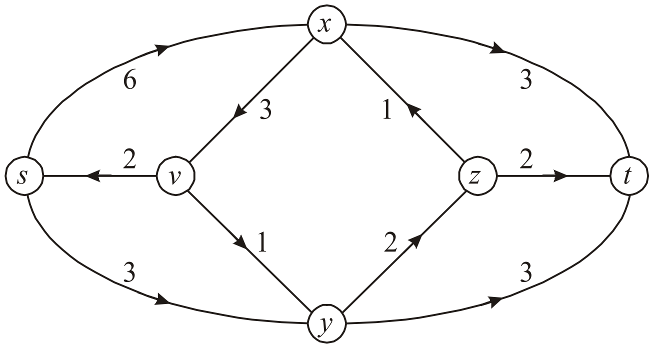
Wniosek
Graf jest k-spójny krawędziowo wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona przynajmniej k drogami krawędziowo rozłącznymi.

Wniosek
Graf o co najmniej k+1 wierzchołkach jest k-spójny (wierzchołkowo) wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych jego wierzchołków jest połączona przynajmniej k drogami wierzchołkowo rozłącznymi.

PRZEPŁYWY W SIECIACH

Siecią nazywamy parę uporządkowaną $S = (D, c)$,
gdzie: $D = (V, A)$ jest grafem skierowanym,
$c : A \to \mathbf{R}_+$ jest funkcją, która przyporządkowuje łukowi (u, v) liczbę rzeczywistą nieujemną $c(u, v)$, nazywaną ***przepustowością*** łuku;
w grafie D wyróżnione są dwa wierzchołki $s, t \in V$ $(s \neq t)$ nazywane: s – ***źródłem***, a t – ***ujściem*** sieci.

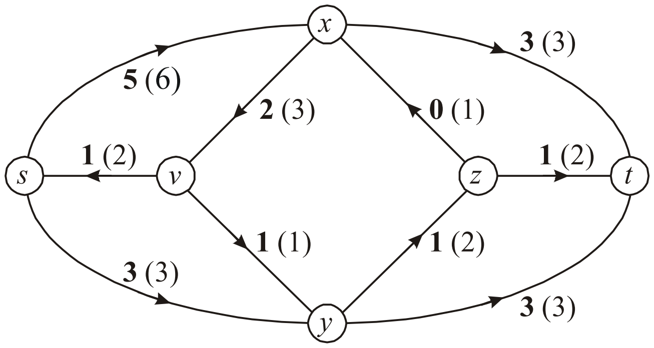
Przykład sieci



Przepływem z s do t w sieci S nazywamy funkcję $f : A \to \mathbf{R}_+$, spełniającą następujące warunki:

1. $0 \le f(u, v) \le c(u, v)$ dla każdego $(u, v) \in A$
2. $\sum_{u \in V^+(v)} f(v,u) - \sum_{u \in V^-(v)} f(u,v) = 0$ dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$

Przykład przepływu w sieci



Wartością przepływu f nazywamy liczbę $W(f)$ wyznaczoną wg wzoru:

$$W(f) = \sum_{u \in V^+(s)} f(s,u) - \sum_{u \in V^-(s)} f(u,s) = \sum_{u \in V^-(t)} f(u,t) - \sum_{u \in V^+(t)} f(t,u)$$

Przykład wyznaczania wartości przepływu w sieci

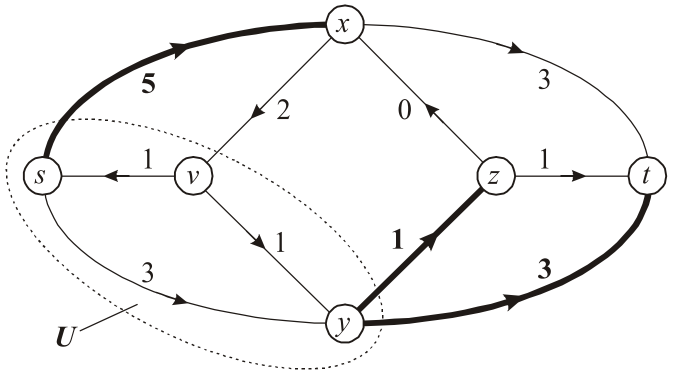
$W(f) = f(s, x) + f(s, y) - f(s, v) = 5 + 3 - 1 = 7$ lub $W(f) = f(x, t) + f(z, t) + f(y, t) = 3 + 1 + 3 = 7$

Dla niepustego podzbioru wierzchołków $U \subset V$ ($C \neq \emptyset$) odpowiadającym mu ***przekrojem sieci*** nazywamy zbiór łuków

$$P_U = A \cap (U \times (V \setminus U)) = \{ (u, v) \in A : u \in U, v \in V \setminus U \}$$

Przepływem przez przekrój P_U nazywamy liczbę $f(U) = \sum_{(u,v) \in P_U} f(u,v)$

Przykład wyznaczania przepływu przez przekrój

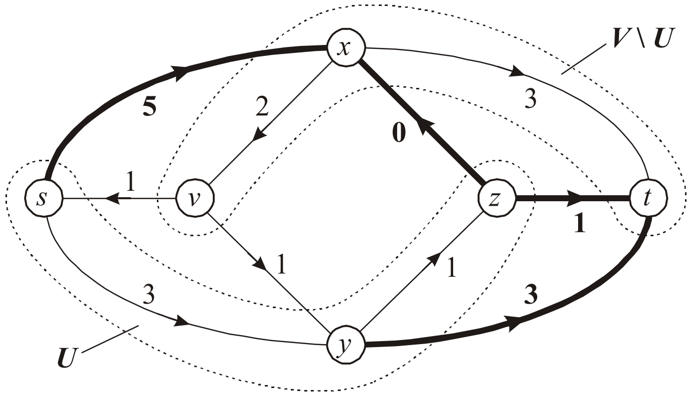


Podzbiory wierzchołków: $U = \{ s, v, y \}, V \setminus U = \{ x, z, t \}$
odpowiadający mu przekrój sieci: $P_U = \{ (s, x), (y, z), (y, t) \}$
i przepływ przez ten przekrój $f(\{s, v, y\}) = f(s, x) + f(y, z) + f(y, t) = = 5 + 1 + 3 = 9$

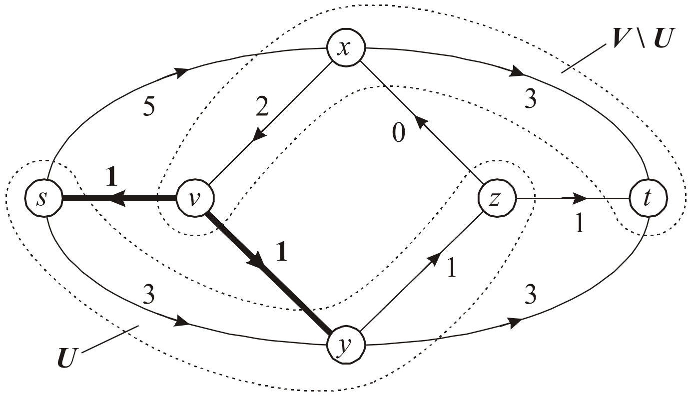
Lemat

Jeśli $s \in U$ i $t \in U \setminus C$, to dla dowolnego przepływu z s do t zachodzi $W(f) = f(U) - f(V \setminus U)$, gdzie $f(U)$ to przepływ przez przekrój P_U, a $f(U \setminus C)$ to przepływ przez przekrój $P_{V \setminus U}$.

Przykład



Podzbiór wierzchołków: $U = \{ s, y, z \}$,
odpowiadający mu przekrój sieci: $P_U = \{ (s, x), (y, t), (z, x), (z, t) \}$
i przepływ przez ten przekrój $f(\{s, y, z\}) = 5 + 3 + 0 + 1 = 9$

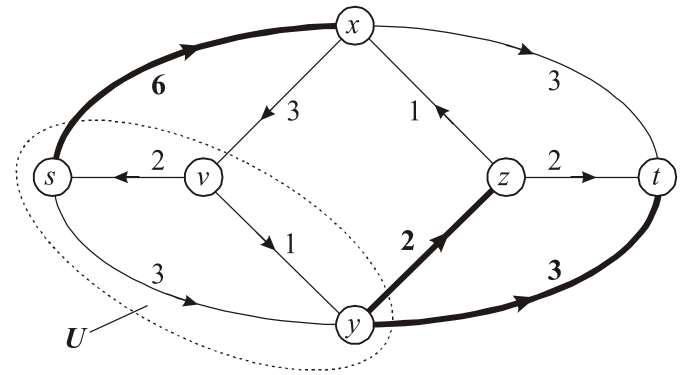


Podzbiór wierzchołków: $V \setminus U = \{ v, x, t \}$,
odpowiadający mu przekrój sieci: $P_{V \setminus U} = \{ (v, s), (v, y) \}$
i przepływ przez ten przekrój $f(\{v, x, t\}) = 1 + 1 = 2$;

$$7 = W(f) = f(\{s, y, z\}) - f(\{v, x, t\}) = 9 - 2 = 7$$

Przepustowością przekroju P_U nazywamy liczbę $c(U) = \sum_{(u,v) \in P_U} c(u, v)$

Przykład wyznaczania przepustowości przekroju

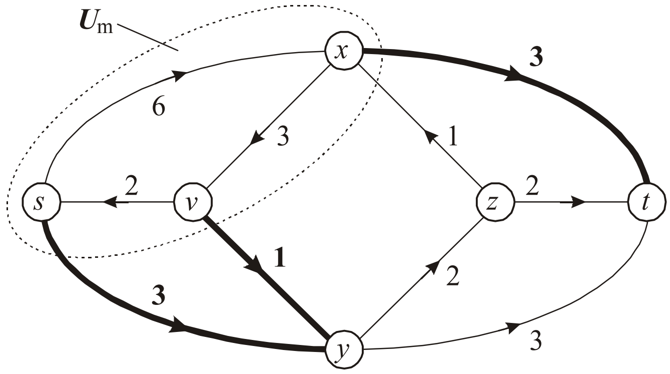


$$c(\{s, v, y\}) = 6 + 2 + 3 = 11$$

Minimalnym przekrojem między s i t nazywamy taki przekrój P_U między źródłem i ujściem ($s \in U$ i $t \in V \setminus U$) , dla którego przepustowość jest najmniejsza ze wszystkich takich przekrojów.

Twierdzenie (Ford, Fulkerson 1955)
W każdej sieci maksymalna wartość przepływu z s do t jest równa przepustowości minimalnego przekroju między s i t.

Przykład zastosowania twierdzenia



Podzbiór $U_m = \{s, v, x\}$ wyznacza minimalny przekrój P_{U_m} między s i t o przepustowości $c(U_m) = \mathbf{7}$.
Zatem poniższy przepływ o wartości **7** jest w tej sieci przepływem o maksymalnej wartości.