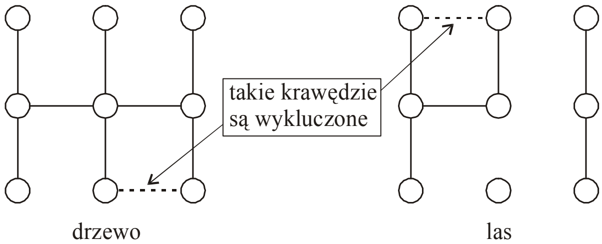
DRZEWA i LASY

Drzewem nazywamy graf spójny nie zawierający cykli elementarnych.
Lasem nazywamy graf nie zawierający cykli elementarnych.

Przykłady drzew i lasów



Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach.
Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

1. G jest drzewem.
2. G nie zawiera cykli elementarnych i ma $n-1$ krawędzi.
3. G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.
4. G jest spójny i każda krawędź jest mostem.
5. Dowolne dwa wierzchołki grafu G są połączone dokładnie jedną drogą.
6. Graf G nie zawiera cykli elementarnych a dołączenie dowolnej nowej krawędzi do G tworzy dokładnie jeden taki cykl.

Dowód

Dla $n = 1$ równoważność stwierdzeń jest oczywista. Zakładamy, że $n \geq 2$.
(1. $\Rightarrow$ 2.) Indukcja względem liczby wierzchołków; załóżmy, że implikacja zachodzi dla dowolnego drzewa o liczbie wierzchołków nie większej od $n-1$. Pokażemy, że zachodzi dla n. Usuńmy z G jedną krawędź. Ponieważ G nie zawiera cykli elementarnych, to usunięcie krawędzi prowadzi do rozpadu G na dwa drzewa, które na mocy założenia indukcyjnego mają razem $(n-2)$ krawędzi. Zatem G musi mieć $(n-1)$ krawędzi.
(2. $\Rightarrow$ 3.) Gdyby G nie był spójny, to łączna liczba krawędzi w jego składowych, będących drzewami, byłaby co najmniej o 2 mniejsza od liczby wierzchołków. Przeczy to założeniu, że G ma $n-1$ krawędzi.
(3. $\Rightarrow$ 4.) Usunięcie dowolnej krawędzi daje graf o n wierzchołkach i $n-2$ krawędziach, który nie jest spójny.
(4. $\Rightarrow$ 5.) Ponieważ G jest spójny, to każda para wierzchołków jest połączona co najmniej jedną drogą. Gdyby dla pewnej pary wierzchołków były dwie takie drogi, to powstałby cykl. Przeczy to założeniu, że każda krawędź jest mostem.
(5. $\Rightarrow$ 6.) Graf G nie może zawierać cyklu elementarnego, bo oznaczałoby to, że istnieje para wierzchołków połączona dwiema drogami wierzchołkowo rozłącznymi. Dołączenie nowej krawędzi utworzy cykl elementarny. Może być tylko jeden taki cykl, bowiem istnienie dwóch takich cykli oznaczałoby, że w G istnieje cykl elementarny nie zawierający dołączanej krawędzi.
(6. $\Rightarrow$ 1.) Graf G musi być spójny. Gdyby tak nie było, to dodanie krawędzi łączącej składowe grafu nie powodowałoby powstania cyklu elementarnego. ■

Wniosek

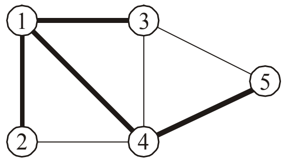
W drzewie o $n \geq 2$ wierzchołkach co najmniej dwa z nich są stopnia 1.

Dowód

$$\sum_{i \in V} d(i) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2 .$$ ■

Dla grafu spójnego $G = (V, E)$ każde drzewo $G_T = (V, T)$ takie, że $T \subseteq E$ nazywamy ***drzewem rozpinającym*** (*dendrytem*) grafu G.

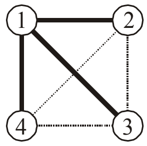
Przykład drzewa rozpinającego



Twierdzenie (Cayley, 1889)
Graf pełny K_n (dla $n \geq 2$) ma n^{n-2} różnych drzew rozpinających.

Przykład liczby drzew rozpinających w grafie pełnym

K_4 :

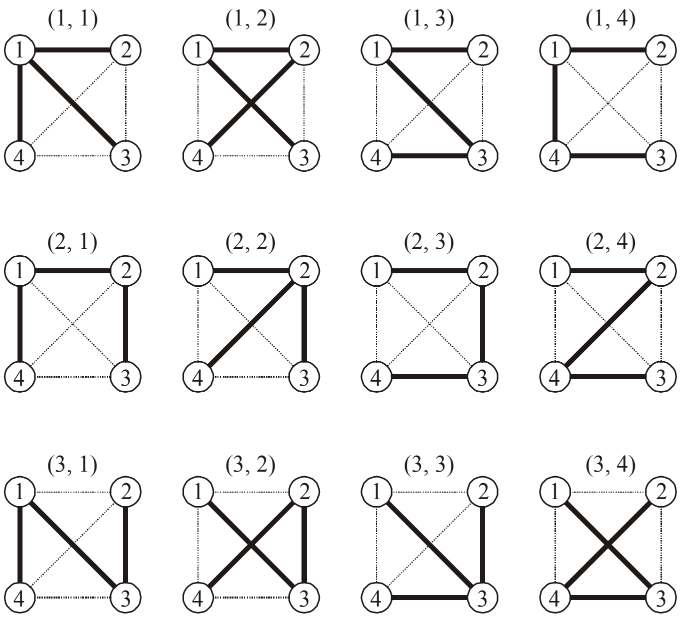


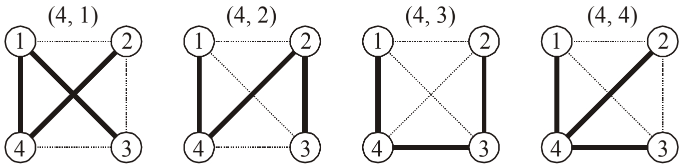
, $n^{n-2} = 4^2 = 16$

Dowód (zarys dowodu – konstrukcja kodu Prüfera dla drzewa)
Załóżmy, że wierzchołki grafu są ponumerowane liczbami naturalnymi 1, ..., n. Łatwo sprawdzić, że dla $n = 2$ tw. zachodzi. Pokażemy, że dla $n \geq 3$ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy drzewami rozpinającymi graf pełny K_n a n^{n-2} ciągami $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$, gdzie a_i jest liczbą naturalną spełniającą nierówność $1 \leq a_i \leq n$.
Załóżmy, że T jest drzewem rozpinającym K_n. Wybieramy wierzchołek v stopnia 1 o najmniejszym numerze i przyjmujemy jako a_1 numer wierzchołka sąsiedniego z v w drzewie T. Usuwamy z T wierzchołek v wraz z incydentną z nim krawędzią. Powtarzamy powyższe postępowanie kolejno dla $a_2, a_3, ..., a_{n-2}$.
Aby ustalić odwrotną odpowiedniość pomiędzy ciągiem $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ a drzewem rozpinającym, weźmy dowolny ciąg $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$, którego każdy wyraz spełnia warunek $1 \leq a_i \leq n$, i zbudujmy odpowiadające mu drzewo T. Niech v będzie najmniejszą liczbą ze zbioru $N = \{1, 2, ..., n\}$, która nie występuje w ciągu $(a_1, a_2, ..., a_{n-2})$. Dodajemy do T krawędź $\{a_1, v\}$. Usuwamy a_1 z ciągu i podstawiamy $N \leftarrow N \setminus \{v\}$. Powtarzamy to postępowanie kolejno dla $a_2, a_3, ..., a_{n-2}$. Na końcu łączymy krawędzią ostatnie dwa wierzchołki, które pozostały w N. ■

Przykład kodowania drzew rozpinających w grafie pełnym

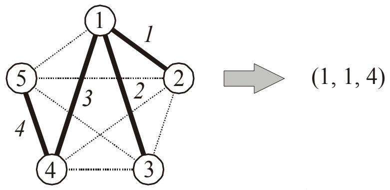
K_4 : $n^{n-2} = 4^2 = 16$



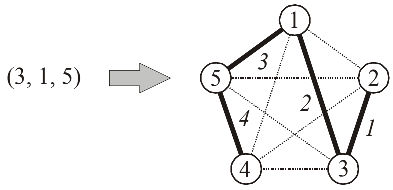


Przykład użycia kodu Prüfera

kodowanie:



odkodowanie:

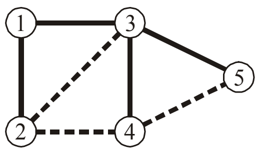


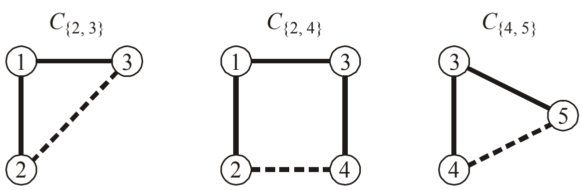
Terminologia:
dla $G_T = (V, T)$, które jest drzewem rozpinającym graf $G = (V, E)$
elementy zbioru T nazywamy ***gałęziami*** (drzewa) a
elementy zbioru $E \setminus T$ nazywamy ***cięciwami*** (grafu).
Jeśli e jest cięciwą, to graf $(V, T \cup \{e\})$ zawiera dokładnie jeden cykl C_e .
Zbiór $\Omega = \{ C_e : e \in E \setminus T \}$ nazywamy ***zbiorem cykli fundamentalnych*** grafu G
(względem drzewa rozpinającego G_T)

Twierdzenie
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, a $G_T = (V, T)$ jego drzewem rozpinającym. Jeżeli każdy cykl będziemy traktowali jak zbiór krawędzi, to dowolny cykl prosty C w grafie G można jednoznacznie przedstawić jako różnicę symetryczną cykli fundamentalnych C_e dla $e \in C \setminus T$:

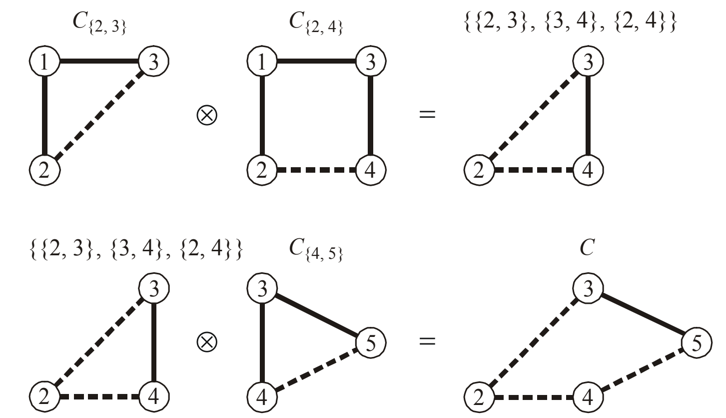
$$C = C_{e_1} \otimes C_{e_2} \otimes ... \otimes C_{e_k}$$

Przykład przedstawiania cyklu
Gałęzie, cięciwy i cykle fundamentalne:





$$\Omega = \{ C_{\{2, 3\}}, \ C_{\{2, 4\}}, \ C_{\{4, 5\}} \}$$



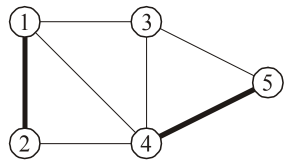
$$(C_{\{2,3\}} \otimes C_{\{2,4\}}) \otimes C_{\{4,5\}} = C = \{\{2,3\},\{3,5\},\{4,5\},\{2,4\}\}$$

SKOJARZENIA, ZBIORY WEWNĘTRZNIE STABILNE i POKRYCIA

Graf $G = (V, E)$

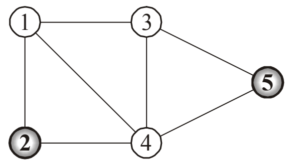
Krawędzie $e', e'' \in E$ nazywamy ***niezależnymi***, jeśli nie są incydentne ze wspólnym wierzchołkiem.
Skojarzeniem w grafie G nazywamy dowolny podzbiór krawędzi parami niezależnych.

Przykład skojarzenia



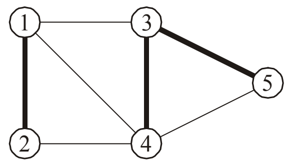
Wierzchołki $v', v'' \in V$ nazywamy ***niezależnymi***, jeśli nie są wierzchołkami sąsiednimi.
Zbiorem wewnętrznie stabilnym wierzchołków grafu G nazywamy dowolny podzbiór wierzchołków parami niezależnych.

Przykład zbioru wewnętrznie stabilnego



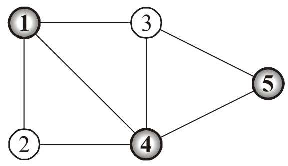
Pokryciem krawędziowym grafu nazywamy taki podzbiór jego krawędzi, że każdy wierzchołek grafu jest incydentny z przynajmniej jedną krawędzią z tego podzbioru.

Przykład pokrycia krawędziowego



Pokryciem wierzchołkowym grafu nazywamy taki podzbiór jego wierzchołków, że każda krawędź grafu jest incydentna z przynajmniej jednym wierzchołkiem z tego podzbioru.

Przykład pokrycia wierzchołkowego



Oznaczenia:

$\nu(G)$ - maksymalna liczba krawędzi niezależnych w grafie G

$\alpha(G)$ - maksymalna liczba wierzchołków niezależnych w grafie G

$\rho(G)$ - minimalna liczba krawędzi pokrywających wszystkie wierzchołki grafu G

$\tau(G)$ - minimalna liczba wierzchołków pokrywających wszystkie krawędzie grafu G

Twierdzenie (Gallai, 1959)
Jeśli graf $G = (V, E)$ jest grafem bez wierzchołków izolowanych, to

$$\nu(G) + \rho(G) = \alpha(G) + \tau(G) = |V|.$$

Ponadto zachodzą nierówności:

$$\nu(G) \le \tau(G), \qquad \alpha(G) \le \rho(G).$$

(maks.moc skojarz. ≤ min.moc pokr.wierz.) (maks.moc zb.w.stab. ≤ min.moc pokr.kraw.)

Twierdzenie (König, 1916)
Jeśli graf jest dwudzielny, to $\nu(G) = \tau(G)$.

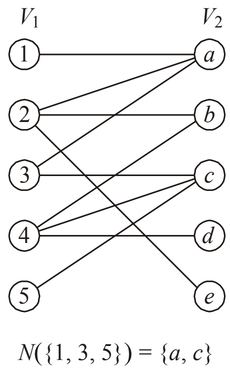
Rozważmy graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$

Skojarzeniem pełnym względem zbioru V_1 nazywamy takie skojarzenie w grafie G, że dla każdego wierzchołka $v \in V_1$ istnieje w skojarzeniu krawędź incydentna z tym wierzchołkiem.

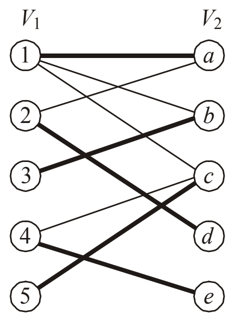
Dla podzbioru $S \subseteq V_1$ zdefiniujmy $N(S)$ – zbiór wierzchołków $v_2 \in V_2$, dla których istnieje $v_1 \in S$ taki, że $\{v_1, v_2\} \in E$.

Twierdzenie „o małżeństwach" (Hall, 1935)
W grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ istnieje skojarzenie pełne względem zbioru V_1 wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdego $S \subseteq V_1$ zachodzi nierówność $|N(S)| \ge |S|$.

Przykład sprawdzania warunku z tw. Halla



(warunek Halla nie zachodzi)



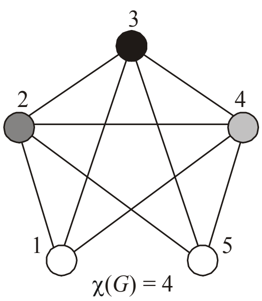
(skojarzenie pełne dla V_1)

KOLOROWANIE WIERZCHOŁKÓW GRAFU

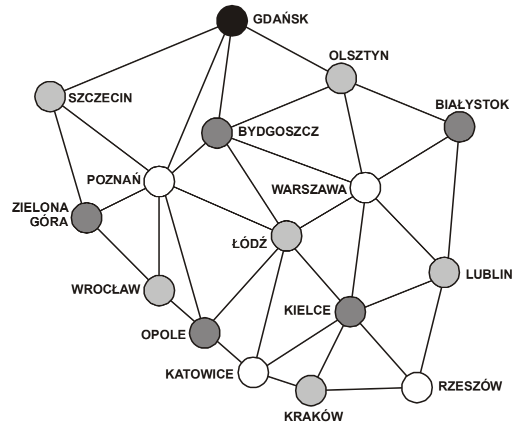
Graf G jest ***k*-barwny**, jeśli każdemu wierzchołkowi można przyporządkować jeden z k kolorów w taki sposób, że wierzchołki sąsiednie mają różne kolory.

$\chi(G)$ - ***liczba chromatyczna*** grafu G, czyli minimalna wartość k, dla której graf jest k-barwny

Przykład wyznaczania liczby chromatycznej



Przykład kolorowania mapy płaskiej



Twierdzenie „o czterech kolorach”
Każdy graf planarny jest 4-barwny.
(każdą płaską mapę można pokolorować czterema kolorami tak, że każde dwa stykające się obszary będą miały różne kolory)

Problem rozstrzygania czy graf planarny (mapa płaska) jest 4-barwny:
- pierwsza pisana wzmianka – list do De Morgana (1852)
- dowód tw. ze wspomaganiem komputera – Appel i Haken (1976)

Twierdzenie (Grötzsch, 1959)
Każdy graf planarny, który nie zawiera podgrafu K_3, jest 3-barwny.

Twierdzenie
Graf jest 2-barwny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli o nieparzystej długości.

Wniosek
Każde drzewo o $n \geq 2$ wierzchołkach jest 2-barwne.

Lemat
Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli o nieparzystej długości.

Wniosek
Każde graf dwudzielny jest 2-barwny.

Twierdzenie (Brooks, 1941)
Jeśli G jest grafem spójnym i nie jest grafem pełnym oraz największy stopień wierzchołka grafu G jest równy $k \geq 3$, to graf G jest k-barwny.

Twierdzenie (Vizing, 1964)
Jeśli największy stopień wierzchołka grafu G jest równy k, to graf G jest $(k+1)$-barwny.