Matematyka Dyskretna (Ćwiczenia)

Jarosław Grytczuk

1 O trudnej sztuce liczenia

1.1 Zasada Mnożenia

1. Pewien pan ma 5 garniturów, 7 krawatów i 10 koszul. Ile różnych zestawów może skompletować?

2. W zawodach bierze udział 20 skoczków narciarskich. Ile jest różnych możliwości zajęcia 3 miejsc na podium?

3. Wypisać wszystkie słowa długości 4 utworzone z liter $\{a, b\}$.

4. Ile słów długości nie większej niż 10 można utworzyć z 3 liter $\{a, b, c\}$?

5. Ile 3-kolorowych chorągiewek można utworzyć dysponując 6 kolorami?

6. Wypisać w porządku leksykograficznym wszystkie permutacje zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

1.2 Zasada Bijekcji

1. Wypisać wszystkie podzbiory zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i do każdego z nich dobrać odpowiedni ciąg binarny długości 4.

2. Wypisać wszystkie ciągi binarne długości 5 i do każdego z nich dobrać odpowiedni podzbiór zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Wypisać wszystkie podzbiory 3-elementowe zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia 6 w totolotku?

5. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania 5 kart jednakowego koloru w pokerowym rozdaniu talii 24 kart?
6. Ile jest najkrótszych dróg w kracie 5×8? Narysować drogę odpowiadającą ciągowi 1001101000100. Narysować dowolną drogę, a następnie napisać kodujący ją ciąg binarny.
7. Wypisać wszystkie sposoby pomalowania 3 jednakowych kul 4 różnymi kolorami.
8. Ile jest sposobów pomalowania 5 jednakowych kul 8 kolorami?
9. Przypuśćmy, że mamy pomalować sześć identycznych kul czterema kolorami. Na ile sposobów możemy to zrobić?
10. Ile rozwiązań w nieujemnych liczbach całkowitych ma równanie
$$x_1 + x_2 + x_3 = 13?$$
Narysuj odpowiednią kratę.
11. Na ile sposobów można rozmieścić 13 jednakowych przedmiotów w 3 różnych pudełkach?

2 Współczynniki dwumianowe

2.1 Własności współczynników $\binom{n}{k}$

1. Napisać 20 początkowych wierszy trójkąta Pascala.
2. Z grupy $2n$ osobowej, w której jest n mężczyzn i n kobiet wybieramy podzbiór złożony z tej samej liczby kobiet i mężczyzn. Pokazać, że można to zrobić na $\binom{2n}{n}$ sposobów.
3. Udowodnić kombinatorycznie, że
$$1^2\binom{n}{1}^2 + 2^2\binom{n}{2}^2 + ... + n^2\binom{n}{n}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}.$$
4. Stosując różne metody pokazać, że
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + ... + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$
5. W kolejce do kina stoi 20 osób, które są wpuszczane do kina grupami (kolejność osób w kolejce nie zmienia się). Na ile sposobów można utworzyć 6 niepustych grup przy wpuszczaniu osób do kina?

6. Ile rozwiązań ma równanie
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$
w *dodatnich* liczbach całkowitych?

7. W poczekalni do lekarza, w rzędzie złożonym z 15 krzeseł, siedzi 7 pacjentów, przy czym żadnych dwóch nie znajduje się obok siebie. Ile jest różnych sposobów takiego usadzenia pacjentów?

2.2 Współczynniki wielomianowe

1. Ile różnych anagramów można ułożyć z liter słowa KOMBINATORYKA?

2. Ile jest różnych liczb zbudowanych z cyfr $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$?

3. Ile jest sposobów pomalowania 10 kulek, z których każda jest innej wielkości, trzema kolorami niebieskim, czerwonym i zielonym tak, aby było 5 kulek niebieskich, 2 czerwone i 3 zielone? Ile jest wszystkich możliwych pokolorowań tych 10 kulek?

3 Indukcja

1. Wykazać, że
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}.$$

2. Niech f_n oznacza n-tą liczbę ciągu Fibonacciego, tzn. $f_1 = f_2 = 1$ i $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, dla $n \geq 3$. Pokazać, że dla każdego n zachodzi wzór
$$f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1.$$

3. Pokazać, że
$$1 + 4 + 9 + 16 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Danych jest n prostych na płaszczyźnie, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie mają wspólnego punktu. Wykazać, że proste te dzielą płaszczyznę na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ regionów.

5. Danych jest n prostych na płaszczyźnie. Nich V oznacza liczbę punktów przecięcia tych prostych, E liczbę wszystkich odcinków (w tym także nieograniczonych) wyznaczonych przez te punkty i F liczbę regionów, na które podzielona została płaszczyzna. Wykazać, że $V - E + F = 1$.

6. Pokazać, że regiony, na które dzieli płaszczyznę n prostych można pomalować dwoma kolorami tak, aby sąsiednie regiony były w różnych kolorach.

4 Trzy podstawowe zasady

4.1 Zasada szufladkowa

1. Ze zbioru $\{1, 2, ..., 2n\}$ wybieramy $n + 1$ różnych liczb. Pokazać, że (1) istnieje para liczb, których suma wynosi $2n + 1$, (2) istnieje para liczb względnie pierwszych, (3) istnieje para, w której jedna z liczb dzieli drugą.

2. Niech T będzie trójkątem równobocznym o boku 1. Pokazać, że (1) wśród dowolnych 5 punktów w T istnieją 2 leżące w odległości nie większe niż $\frac{1}{2}$, (2) nie da się pokryć T trzema kolami o średnicach mniejszych niż $1/\sqrt{3}$.

3. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna N, że przy dowolnym kolorowaniu boków i przekątnych N-kąta foremnego 3 kolorami musi istnieć k wierzchołków takich, że wszystkie odcinki pomiędzy nimi są tego samego koloru.

4. Dla permutacji $5, 3, 7, 6, 4, 10, 8, 9, 1, 2$ sporządzić tabelkę taką jak w Przykładzie 34. Znaleźć monotoniczny podciąg długości 4.

5. Czy jest prawdą, że w dowolnej nieskończonej permutacji liczb $1, 2, 3, ...$ będzie istniał nieskończony monotoniczny podciąg?

4.2 Zasada dwoistości

1. Po szachownicy o wymiarach 7×7 chodzi 49 mrówek. W pewnym momencie na każdym polu znajduje się dokładnie jedna mrówka. Czy jest możliwe, aby każda z nich przeszła na sąsiednie pole tak, aby nadal na żadnym polu nie było 2 mrówek?

2. Czy prostopadłościennymi kostkami wymiaru $1 \times 1 \times 2$ można obudować sześcian o krawędzi 5, tak aby otrzymać sześcian wymiaru $7 \times 7 \times 7$?

3. Podać przykład łamanej zamkniętej, której nie da się narysować bez odrywania ołówka od papieru.

4. Narysuj dowolną krzywą zamkniętą z 5 dwukrotnymi punktami samoprzecięcia. Wyznacz jej *kod Gaussa* i sprawdź, że liczba symboli pojawiających się dokładnie jeden raz pomiędzy dwoma wystąpieniami tego samego symbolu jest zawsze parzysta (Problem 38).

4.3 Zasada włączania i wyłączania

1. W pewnym klubie jest 20 osób grających w szachy i 15 grających w brydża. Spośród nich 8 gra w obie te gry. Ile osób jest w tym klubie?

2. W pewnym klubie jest 20 osób grających w szachy, 15 grających w brydża i 13 grających w pokera. Spośród nich 7 gra w szachy i brydża, 6 w brydża i pokera, 5 w szachy i pokera, a tylko 3 grają we wszystkie te gry. Ile osób jest w tym klubie?

3. Permutację $P = a_1a_2...a_n$ nazywamy nieporządkiem jeśli $a_i \neq i$ dla każdego $i = 1, 2, ..., n$. Wypisać wszystkie nieporządki dla $n = 2, 3, 4$.

4. Napisano 5 listów i zaadresowano dla nich 5 kopert. Wykazać, że prawdopodobieństwo tego, że żaden list nie znajdzie się we właściwej kopercie wynosi $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$.

5. Ile liczb spośród $1, 2, ..., 10^6$ jest podzielnych przez co najmniej jedną z liczb $2, 3, 5$?

5 Grafy

5.1 Sąsiedztwo i incydencja

1. Wyznaczyć wszystkie grafy na $2, 3, 4$ wierzchołkach.

2. Czy istnieje graf na 6 wierzchołkach o stopniach $2, 3, 3, 3, 3, 3$?

3. Czy istnieje graf na 6 wierzchołkach o stopniach $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

4. Ile jest grafów na $2k$ wierzchołkach o stopniach $1, 1, ..., 1$?

5. Jaka jest największa liczba krawędzi w grafie o 10 wierzchołkach?

6. Ile jest różnych grafów na 20 wierzchołkach?

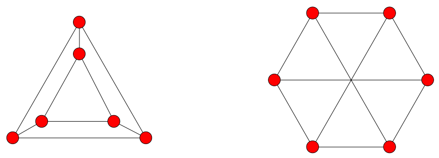
7. Narysować graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \{1, 2, ..., 10\}$ i $ab \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \mid b$ lub $b \mid a$.

8. Narysować graf $G = (V, E)$ gdzie $V = \{1, 2, ..., 10\}$ i $ab \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a, b) = 1$.

9. Dla grafów z zadania 7 i 8 sprawdzić Lemat o uściskach dłoni.

10. Skonstruować graf o 5 wierzchołkach i 6 krawędziach nie zawierający trójkąta.

11. Uzasadnić, że grafy na rysunku poniżej nie są izomorficzne.



12. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Narysować graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \binom{X}{2}$ i $AB \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$. Pokazać, że G jest izomorficzny z grafem Petersena.

13. Narysować graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \mathcal{B}_3$ i $ab \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi a i b różnią się na dokładnie jednej pozycji. Pokazać, że G jest izomorficzny z grafem utworzonym przez wierzchołki i krawędzie zwykłego sześcianu.

14. Odbywa się przyjęcie u państwa Szaradków, w którym oprócz Pana Szaradka i Pani Szaradkowej biorą udział cztery inne pary. Ludzie wymieniają uściski dłoni między sobą, przy czym żadne dwie osoby nie robią tego dwa razy i nikt nie wita się ze swoim partnerem/partnerką. Zarówno Pan jak i Pani domu wymienili z kimś z gości co najmniej po jednym uścisku. Pod koniec przyjęcia Pan Szaradek zapytał każdego (wyłączając siebie) o liczbę dokonanych uścisków. W odpowiedzi każda z osób podała inną liczbę. Ile uścisków dokonała Pani Szaradkowa?

5.2 Ścieżki i cykle

1. Ile składowych ma graf z przyjęcia u państwa Szaradków?

2. Cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu G nazywamy *cyklem Hamiltona*. Czy każdy z grafów Platońskich posiada cykl Hamiltona?

3. Niech $Q_n = (V, E)$ będzie grafem, w którym $V = \mathcal{B}_n$ i $ab \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi a i b różnią się na dokładnie jednej

pozycji. Graf Q_n nazywamy *n-wymiarowym sześcianem.* Pokazać, że dla każdego n (1) Q_n jest grafem regularnym o stopniu n, (2) Q_n jest grafem dwudzielnym, (3) $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$, (4) Q_n zawiera cykl Hamiltona.

4. Czy graf Petersena zawiera cykl Hamiltona?

5. Uzasadnić, że w dowolnym grafie spójnym dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

5.3 Nowe grafy ze starych

1. Wyznaczyć wszystkie podgrafy grafu K_4 na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Wyznaczyć wszystkie spójne podgrafy garfu Q_3 (z dokładnością do izomorfizmu).

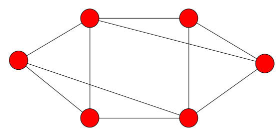
3. Wyznaczyć wszystkie spójne indukowane podgrafy grafu Q_3 (z dokładnością do izomorfizmu).

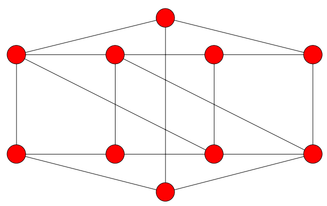
4. Ile różnych podgrafów indukowanych (nieizomorficznych) ma graf $K_{n,n}$?

5. Korzystając z Przykładu 33 uzasadnić, że dla dowolnego grafu H istnieje taka liczba R, że jeżeli G jest dowolnym grafem rzędu R, to albo G albo $\overline{G}$ zawiera H jako podgraf.

5.4 Grafy planarne

1. Jeden z poniższych grafów jest planarny. Znaleźć go i narysować jego prostoliniową reprezentację na płaszczyźnie.





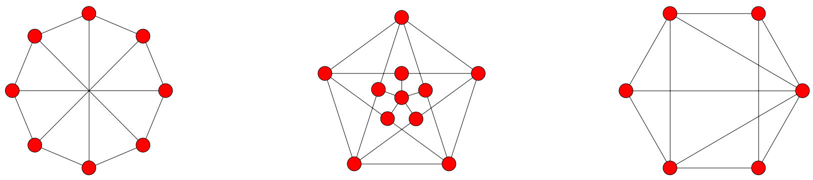
2. Znaleźć graf G na ośmiu wierzchołkach taki, że zarówno G jak i $\overline{G}$ jest planarny.

3. Pokazać, że jeśli $|V(G)| \geq 11$, to oba grafy G i $\overline{G}$ nie mogą być jednocześnie planarne.

4. Niech G będzie grafem planarnym, którego wszystkie wierzchołki leżą na wspólnej (zewnętrznej) ścianie. Pokazać, że $\chi(G) \leq 3$.

5. Wykorzystując wzór Eulera rozwiązać Problem 14.

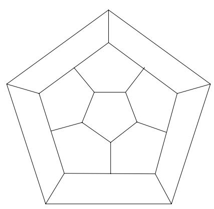
6. Wyznaczyć liczbę chromatyczną następujących grafów: K_n, $K_{m,n}$, C_{2k}, C_{2k+1}, oraz tych z rysunku poniżej.



7. Pokazać, że jeśli G jest grafem regularnym stopnia k i rzędu n, to $\chi(G) \geq \frac{n}{n-k}$.

8. Niech $G = (V, E)$ będzie dowlonym grafem takim, że $V \subset \mathbb{R}^2$ i $uv \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy długość odcinka łączącego u i v wynosi 1. Pokazać, że $4 \leq \chi(G) \leq 7$.

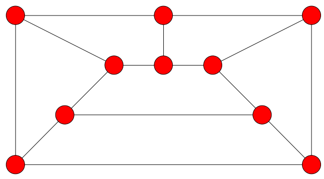
9. Który z graczy, Jacek czy Placek, ma strategię wygrywającą w kolorowaniu poniższej mapy 5 kolorami?



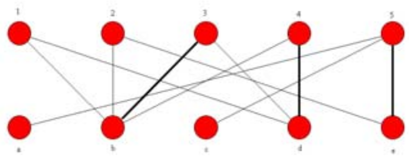
5.5 Grafy dwudzielne

1. Narysować graf dwudzielny $G = (X \cup Y, E)$, w którym $X = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $Y = \{99, 100, 101, 102, 103\}$ i $xy \in E$, wtedy, gdy x dzieli y.

2. Czy graf na rysunku poniżej jest dwudzielny?



3. Niech M będzie skojarzeniem pokazanym na rysunku poniżej.



(1) Znaleźć ścieżkę naprzemienną dla M zaczynającą się w wierzchołku 2. (2) Wykorzystując znalezioną ścieżkę skonstruować skojarzenie M' takie, że $|M'| = 4$. (3) Sprawdzić, że dla M' ścieżka naprzemienna nie istnieje. (4) Pokazać, że ten graf nie spełnia założenia twierdzenia Halla.

4. Niech $\mathcal{F}$ będzie następującą rodziną zbiorów:

$$\{a, b, l, e\}, \{l, e, s, t\}, \{s, t, a, b\}, \{s, a, l, e\}, \{t, a, l, e\}, \{s, a, l, t\}.$$

Znaleźć transwersalę dla $\mathcal{F}$.

5. Niech $\mathcal{F}$ będzie następującą rodziną zbiorów:

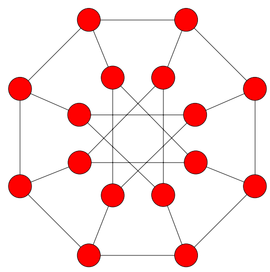
$$\{a, m\}, \{a, r, e\}, \{m, a, r, e\}, \{m, a, s, t, e, r\}, \{m, e\}, \{r, a, m\}.$$

Pokazać, że $\mathcal{F}$ nie posiada transwersali.

6. Narysować graf Newmana (Problem 68) dla $n = 10$ i $r = 22$ i znaleźć w nim skojarzenie doskonałe.

7. Pokazać, że graf z rysunku poniżej jest dwudzielny i pomalować

jego krawędzie 3 kolorami.



8. Pomalować krawędzie grafu Q_3 trzema kolorami.

9. Rozważmy *graf Heawooda* H otrzymany z cyklu C_{14} na zbiorze wierzchołków $V = \mathbb{Z}_{14}$ przez dodanie krawędzi $\{x, x+5\}$ dla $x = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$. Pokazać, że H jest dwudzielny i skonstruować kolorowanie krawędzi grafu H używając $\chi'(G)$ kolorów.

6 Kwadraty łacińskie

1. Podane prostokąt łaciński 3×5 rozszerzyć do kwadratu łacińskiego 5×5.
$$P = \begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,4\,2\,3\,1 \\ 2\,1\,4\,5\,3 \end{bmatrix}$$

2. Skonstruować kolorowanie krawędzi grafu $K_{3,5}$ określone prostokątem łacińskim z poprzedniego zadania.

3. Skonstruować kwadrat łaciński rzędu 10 przypominający tabliczkę mnożenia (Problem 73).

4. Skonstruować parę ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu $n = 3, 5, 7, 11$.

5. Ze zwykłej talii kart wyjąć zestaw 16 kart składający się z figur Walet, Dama, Król i As, we wszystkich czterech kolorach. Ułożyć te karty w kwadrat 4×4 tak, aby każdy rząd zawierał dokładnie jedną kartę każdej maści i każdego koloru.

6. Korzystając z poprzedniego zadania skonstruować parę ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu 4.