Fizyka — zadania z rozwiązaniami

Jacek Izdebski

Radzyń Podlaski 2001

Spis treści

1 Zadanie 1 — rzut ukośny.

Z wysokości $h_0 = 30\ m$ wykonywany jest ukośnie do góry rzut pod kątem $\alpha = 30^o$ do poziomu z szybkością $v_0 = 15\ m/s$. Wyznaczyć:

- czas do momentu upadku
- miejsce upadku
- położenie końcowe
- przemieszczenie całkowite
- prędkość końcową
- promień krzywizny w najwyższym punkcie toru
- drogę całkowitą (odpowiedź można podać w formie całki oznaczonej)

1.1 Czas do momentu upadku.

Rysunek 1: Ilustracja przedstawia oznaczenia wysokości użyte w tekście.

Rzut ukośny jest złożeniem dwóch rzutów, rzutu pionowego do góry i ruchu jednostajnego (w kierunku poziomym). O czasie t lotu decyduje rzut pionowy (ciało porusza się do chwili spadnięcia na ziemię). W tym zadaniu obliczamy czas wznoszenia $t_\uparrow$ wykorzystując znajomość przyspieszenia ziemskiego $g = 9.81\ \frac{m}{s^2}$.
Czas wznoszenia można obliczyć z następującego wyrażenia:

$$h_\uparrow = \frac{-gt_\uparrow^2}{2} + v_{o\perp}t_\uparrow \tag{1}$$

gdzie $h_\uparrow$ jest wysokością na jaką wzniesie się ciało liczoną od wysokości wystrzelenia ciała; $v_{o\perp}$ to składowa pionowa początkowej prędkości ciała. Na wytłumaczenie zasługuje również minus we wzorze 1. Ciało wznosząc się traci prędkość, czyli hamuje. Hamowanie, zwane również opóźnieniem, to przyspieszenie ujemne. Oczywiście ciało spadające zwiększa swą prędkość i wtedy mamy przyspieszenie dodatnie, tak jak we wzorze 2

$$h_\downarrow = \frac{gt_\downarrow^2}{2} \tag{2}$$

Wzór 2 nie ma członu związanego z prędkością początkową z tego względu, że spadając z wysokości $h_\downarrow$ (liczonej od poziomu 0) ma początkowo prędkość równą zeru.

Aby obliczyć całkowity czas ruchu t należy dodać do siebie czas wznoszenia $t_\uparrow$ i czas spadania $t_\downarrow$.

$$t = t_\uparrow + t_\downarrow \tag{3}$$

Z równania 1 możemy wyznaczyć $t_\uparrow$, co daje:

$$t_{\uparrow 1} = \frac{v_{0\perp} + \sqrt{v_{o\perp}^2 - 2gh_\uparrow}}{g} \tag{4}$$

oraz

$$t_{\uparrow 2} = \frac{v_{0\perp} - \sqrt{v_{o\perp}^2 - 2gh_\uparrow}}{g} \tag{5}$$

Oczywiście $t_{\uparrow 2}$ możemy odrzucić ponieważ jest niefizyczny(czas nie może być mniejszy od zera). Od tej pory zamiast $t_{\uparrow 1}$ będziemy pisać po prostu $t_\uparrow$.

Nie znamy jeszcze wysokości $h_\uparrow$ na jaką wzniesie się ciało. Nie jest to żadnym problemem, ponieważ wykorzystując zasadę zachowania energii możemy napisać następujące równanie:

$$E_p(h_\uparrow) = E_k(h_0) \tag{6}$$

W równaniu tym możemy zaniedbać tę część energii, która się nie zmienia w ciągu całego ruchu (energia kinetyczna związana z ruchem poziomym).

Powyższe równanie zostało napisane przy założeniu, że energia potencjalna liczona jest od poziomu h_0. Podczas wznoszenia się ciała energia kinetyczna maleje kosztem energii potencjalnej tak, że na wysokości maksymalnej $h_\uparrow$ energia kinetyczna jest zerowa (pomijając energię ruchu poziomego) a energia potencjalna jest taka sama jak energia kinetyczna na wysokości h_0. Można to napisać wprost:

$$mgh_\uparrow = \frac{mv_{0\perp}^2}{2} \tag{7}$$

co prowadzi do rozwiązania

$$h_{\uparrow} = \frac{v_{0\perp}^2}{2g} \tag{8}$$

a to daje możliwość obliczenia czasu wznoszenia $t_{\uparrow}$. Podstawiając 8 do 4 dostajemy czas wznoszenia.

$$t_{\uparrow} = \frac{v_{0\perp}}{g} \tag{9}$$

Teraz należy obliczyć czas spadania. W tym zadaniu nie jest on taki sam jak czas wznoszenia ponieważ wysokość z jakiej spada ciało jest inna od tej z jakiej zostało ono wystrzelone (patrz rys. 1).

Czas spadania można obliczyć przekształcając równanie 2 do postaci

$$t_{\downarrow} = \sqrt{\frac{2h_{\downarrow}}{g}} \tag{10}$$

Jak można zauważyć z rysunku 1

$$h_{\downarrow} = h_0 + h_{\uparrow} \tag{11}$$

$$h_{\downarrow} = h_0 + \frac{v_{0\perp}^2}{2g} \tag{12}$$

Po podstawieniu 12 do 10 zapisujemy

$$t_{\downarrow} = \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_{0\perp}^2}{g^2}} \tag{13}$$

Czas ruchu zgodnie z 3 i po wykorzystaniu 9 oraz 13 można opisać wzorem

$$t = \frac{v_{0\perp}}{g} + \sqrt{\frac{2h_0}{g} + \frac{v_{0\perp}^2}{g^2}} \tag{14}$$

Zależność ta nie może być ostatecznym rozwiązaniem ponieważ nie mamy danej wprost wartości $v_{0\perp}$. Składowe prędkości początkowej v_0 są następujące:

$$v_{0\perp} = v_0 \sin(\alpha) \tag{15}$$

$$v_{0||} = v_0 \cos(\alpha) \tag{16}$$

Teraz podstawiając 15 do 14 otrzymujemy wreszcie ostateczne wyrażenie pozwalające obliczyć całkowity czas ruchu.

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{2h_0}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2}} \tag{17}$$

Po podstawieniu danych liczbowych uzyskujemy

$$t \approx 3.35\ s$$

1.2 Miejsce upadku.

Obliczenie miejsca upadku ciała z jest niezmiernie proste, gdy obliczyliśmy już całkowity czas ruchu. Składowa pozioma prędkości $v_0||$ nie ulega zmianie w ciągu całego ruchu (opór powietrza pomijamy). To właśnie ta składowa decyduje o zasięgu rzutu ukośnego.

$$z = v_{0||} \cdot t \tag{18}$$

$$z = v_0 \cos(\alpha) \cdot \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{2h_0}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2}} \right) \tag{19}$$

Co po podstawieniu danych daje

$$z \approx 43.558\ m$$

1.3 Położenie końcowe.

Zgodnie z rysunkiem 2 i równaniem ruchu w postaci parametrycznej, zapisanym poniżej

$$\begin{cases} y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_o \sin(\alpha) \cdot t + h_0 \\ x(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \end{cases} \tag{20}$$

Otrzymujemy punkt położenia końcowego P_k o współrzędnych $P_k = (l, 0)$, czyli konkretnie

$$P_k = (43.558\ m, 0)$$

1.4 Przemieszczenie całkowite.

Przemieszczenie całkowite jest wektorem $\vec{M}$ mającym początek w punkcie $P_p = (0, h_0)$ a koniec w punkcie $P_k = (l, 0)$ tak więc współrzędne tego wektora będą następujące $\vec{M} = [l, -h_0]$. Długość wektora przesunięcia obliczamy następująco

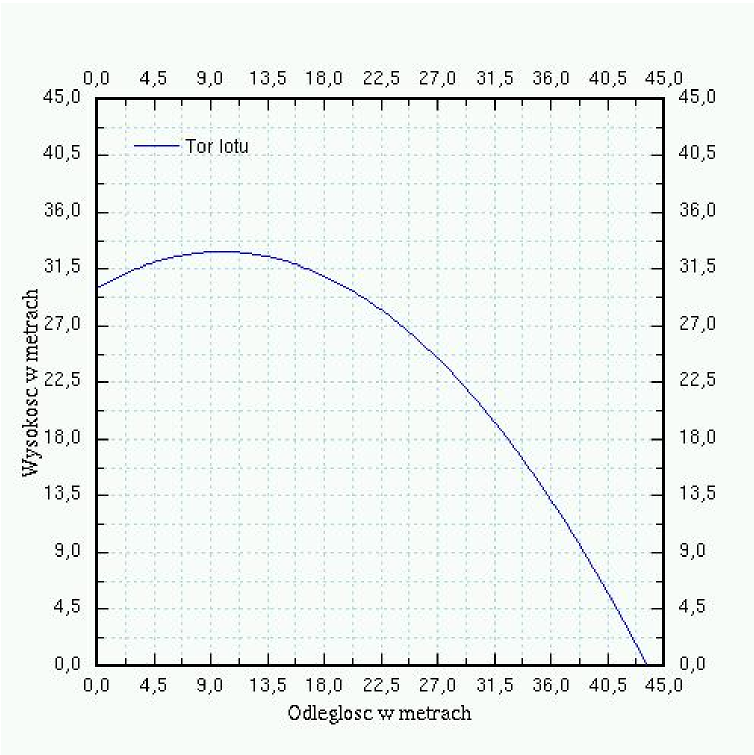
$$|M| = \sqrt{l^2 + (-h_0)^2} = \sqrt{l^2 + h_0^2} \tag{21}$$

Po podstawieniu danych współrzędne wektora przemieszczenia są następujące

$$\vec{M} = [43.558\ m, -30\ m]$$

oraz długość wektora przesunięcia

$$|\vec{M}| = 52.89\ m$$



Rysunek 2: Wykres przedstawia równania ruchu 20 opisujące ruch ciała w tym zadaniu

1.5 Prędkość końcowa.

Wektor prędkości końcowej $\vec{v}_k$ tworzą dwie składowe. Składowa równoległa do podłoża $v_{k||}$ (jest ona równa składowej $v_{0||}$ nie zmieniającej się w czasie ruchu).
Składowa prędkości $v_{||}(t)$ skierowana pionowo w dół rośnie z przyspieszeniem g, poczynając od zerowej prędkości na najwyższej wysokości $h_{\downarrow}$ do prędkości końcowej $v_{k||}$ tuż nad powierzchnią Ziemi. Składową $v_{k||}$ można obliczyć np. z zasady zachowania energii, co prowadzi do równania

$$\frac{mv_{k||}^2}{2} = mgh_{\downarrow} \tag{22}$$

Po prostych przekształceniach dostajemy

$$v_{k||} = \sqrt{2gh_{\downarrow}} \tag{23}$$

Za $h_{\downarrow}$ podstawiamy wynik z (12)

$$v_{k||} = \sqrt{2g\left(h_0 + \frac{v_{0\perp}^2}{2g}\right)} \tag{24}$$

Można jeszcze podstawić wprost $v_{0\perp}$ z (15)

$$v_{k||} = \sqrt{2g\left(h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}\right)} \tag{25}$$

Nie wolno zapomnieć, że tak naprawdę celem naszym jest obliczenie prędkości końcowej, która jest wektorową sumą obydwu obliczonych wcześniej składowych.

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{k||} + \vec{v}_{k\perp} \tag{26}$$

Polecenie nie precyzuje czy należy podać jedynie długość wektora prędkości końcowej czy także jego kierunek. Dlatego obliczmy i jedno i drugie.
Współrzędne wektora prędkości końcowej są już praktycznie obliczone. Wystarczy zauważyć, że składowe $v_{k||}$ i $v_{k\perp}$ używane do tej pory, są wektorami równoległymi do osi obranego przez nas układu współrzędnych (patrz rys. 2). Oznacza to, że (z dokładnością do znaku) są to współrzędne wektora prędkości końcowej $\vec{v}_k$, które ostatecznie zostały zapisane poniżej.

$$\vec{v}_k = \left[v_0\cos(\alpha), -\sqrt{2g\left(h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}\right)}\right] \tag{27}$$

Liczbowe wartości są następujące

$$\vec{v}_k = [12.99\ m/s, -25.39\ m/s]$$

Mając współrzędne wektora prędkości można bez trudu obliczyć wartość prędkości i po prostych przekształceniach otrzymamy

$$|\vec{v}_k| = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \tag{28}$$

i liczbowo

$$|\vec{v}_k| \approx 28.52\ m/s$$

1.6 Promień krzywizny toru w najwyższym punkcie.

W najwyższym punkcie toru składowa prędkości styczna do toru jest równa $v_{0||}$ a przyspieszenie normalne do krzywizny toru to po prostu g. Tak więc promień okręgu stycznego do toru w najwyższym punkcie jest równy

$$R = \frac{v_{0||}^2}{g} \tag{29}$$

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \tag{30}$$

Co po podstawieniu daje $R \approx 17.202\ m$

1.7 Droga całkowita.

Aby obliczyć drogę przebytą wzdłuż krzywej należy wykonać całkowanie wzdłuż tej krzywej. Kluczowe pytanie brzmi: jak to zrobić?

Należy podzielić krzywą na bardzo małe (infinityzymalne) odcinki dl. Aby obliczyć długość jakiegoś odcinka krzywej należy do siebie dodać wszystkie odcinki dl. Pojedynczy odcinek dl jest równy:

$$dl = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2 + dx^2}$$

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}dx$$

Teraz wystarczy wykonać sumowanie wszystkich odcinków dl, ale z racji, że odcinki dl są infinityzymalne wykonujemy obustronne całkowanie dostając ogólny wzór na długość krzywej.

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx \tag{31}$$

Na podstawie parametrycznego równania ruchu (20) możemy wypisać równanie opisujące kształt toru, gdzie nie występuje wprost parametr t (czas).

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \mathrm{tg}(\alpha) \cdot x + h_0 \tag{32}$$

Pochodna powyższej funkcji liczona po x ma następującą postać:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \cdot x + \mathrm{tg}(\alpha) \tag{33}$$

Podstawiając (33) do (31) dostajemy

$$l = \int_0^z \sqrt{-\frac{g^2}{v_0^4 \cos^4(\alpha)} \cdot x^2 - \frac{2g\,\mathrm{tg}(\alpha)}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \cdot x + \mathrm{tg}^2(\alpha) + 1} dx \tag{34}$$

Granice całkowania obejmują całą odległość od miejsca wystrzelenia do miejsca upadku (patrz rys. 2). Ze względu na dosyć rozbudowaną formułę opisującą górną granicę całki (patrz wzór 19) nie możliwe było wypisanie tej górnej granicy explicite.

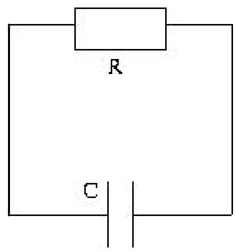
2 Zadanie 2 — rozładowywanie kondensatora.

Po jakim czasie rozładuje się kondensator do połowy, jeżeli wiadomo, że stała czasowa obwodu rozładowania wynosi 15 s?

2.1 Rozwiązanie zadania 2.

Obwód w jakim rozładowuje się kondensator może wyglądać np. jakoś tak jak na rysunku 3. Zacznijmy od wypisania II prawa Kirchhoffa dla obwodu zamkniętego. Prawo to mówi, że suma napięć w oczku jest równa zeru.

$$\frac{Q}{C} = RI \tag{35}$$



Rysunek 3: Schemat układu w którym rozładowuje się kondensator.

Gdy kondensator rozładowuje się to natężenie prądu jest malejące, więc $I = -\frac{dQ}{dt}$, co po podstawieniu daje

$$\frac{Q}{C} = -R\frac{dQ}{dt} \tag{36}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{CR} \tag{37}$$

$$\frac{1}{Q}dQ = -\frac{1}{CR}dt \tag{38}$$

$$\int \frac{1}{Q}dQ = -\int \frac{1}{CR}dt \tag{39}$$

$$\ln(Q) = -\frac{t}{CR} + A \tag{40}$$

$$Q = e^{-\frac{t}{CR}} \cdot e^{A} \tag{41}$$

Po tych prostych przekształceniach dochodzimy do wyrażenia na wielkość ładunku zgromadzonego na kondensatorze w funkcji czasu.

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{CR}} \tag{42}$$

Aby obliczyć teraz czas jaki jest potrzebny aby kondensator stracił połowę ładunku należy wstawić zamiast Q połowę ładunku początkowego $\frac{1}{2}Q_0$

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-\frac{t_{1/2}}{CR}} \tag{43}$$

$$\ln 2 = \frac{t_{1/2}}{CR} \tag{44}$$

I dostajemy ostateczny wynik. Należy się jeszcze słowo wyjaśnienia, iloczyn CR jest nazywany stałą czasową obwodu i oznaczany jako τ.

$$t_{1/2} = CR \ln 2 \tag{45}$$

Po podstawieniu danych dostajemy $t_{1/2} = 10.4\ s$.

3 Zadanie 3 — moment bezwładności.

Obliczyć moment bezwładności cienkiego krążka o promieniu $R = 10\ cm$ i masie $m = 200\ g$, jeżeli wiruje on wokół osi stycznej do krawędzi krążka.

3.1 Rozwiązanie zadania 3.

Moment bezwładności krążka wirującego wokół swojej średnicy wynosi

$$I = \frac{1}{4}mr^2 \tag{46}$$

Wiedząc to można wykorzystując tw. Steinera przesunąć oś obrotu o r.

$$I = \frac{1}{4}mr^2 + mr^2 \tag{47}$$

Więc szukany moment bezwładności będzie wynosił

$$I = \frac{5}{4}mr^2 \tag{48}$$

Co po podstawieniu danych liczbowych daje $I = 0.0025\ kg \cdot m^2$.

4 Zadanie 4 — drgania mechaniczne.

Po jakim czasie drgania kamertonu zmaleją e-krotnie, jeżeli wiadomo, że ośmiokrotnie maleją po 120 s?

4.1 Rozwiązanie zadania 4.

Możemy przyjąć, że drgania kamertonu zanikają w sposób następujący

$$\frac{dA}{dt} = -kA \tag{49}$$

Czyli, że zmiana amplitudy drgań w czasie będzie proporcjonalna do amplitudy drgania w danej chwili.

Rozwiązanie takiego równania różniczkowego już znamy, jest nim funkcja typu

$$A = A_0 e^{-kt} \tag{50}$$

Teraz pozostaje obliczyć współczynnik k (jako t' oznaczamy czas podany w zadaniu)

$$\frac{1}{8}A_0 = A_0 e^{-kt'} \tag{51}$$

$$k = \frac{\ln 8}{t'} \tag{52}$$

Tak więc czas po jakim drgania zmaleją e-krotnie wynosi

$$t = \frac{\ln(e)}{k}$$

$$t = \frac{t'}{\ln(8)}$$

Czyli po podstawieniu danych

$$t = \frac{120}{\ln(8)}$$

$$t = 57.7\ s$$

5 Zadanie 5 — rozpad promieniotwórczy.

Rozpad 0.2 preparatu promieniotwórczego trwa 100 godzin. W jakim czasie ilość preparatu zmieni się od 1 g do 0.8 g?

5.1 Rozwiązanie zadania 5.

Zanim zaczniemy analizować ogólny sposób rozwiązywania zadań tego typu warto zwrócić uwagę na fakt, że w tym zadaniu właściwie nie ma co liczyć. Przecież zmiana masy preparatu od ilości 1 g *do* 0.8 g *to inaczej strata* 0.2 *całego preparatu. Zadanie zawiera już odpowiedź, że rozpad* 20% *preparatu trwa* 100 *godzin.*

Zadanie pod względem matematycznym jest podobne do poprzednich. Rozpad substancji promieniotwórczej przebiega następująco (niezależnie od typu rozpadu). Istnieje pewne, (stałe dla danej substancji) prawdopodobieństwo rozpadu atomu w określonym czasie. Prawdopodobieństwo to można zdefiniować następująco.
Niech $-dN$ oznacza ilość atomów które się rozpadły ('-' oznacza ubytek) w

czasie dt a N jest ilością atomów na początku czasu dt, to wtedy $\frac{dN}{N}$ jest prawdopodobieństwem rozpadu jednego z N atomów. Jeśli zaś zapiszemy to tak

$$\frac{\frac{-dN}{N}}{dt} = \lambda \tag{53}$$

to wtedy (53) będzie oznaczać prawdopodobieństwo rozpadu atomu w czasie dt. Takie prawdopodobieństwo nazywa się stałą rozpadu promieniotwórczego. Równanie (53) można doprowadzić do postaci

$$\frac{1}{N}dn = -\lambda dt \tag{54}$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego jest znane z poprzednich zadań i dla tego przypadku wygląda tak

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{55}$$

Wiedząc w jakim czasie rozpada się 0.2 całego preparatu promieniotwórczego możemy obliczyć jaka jest stała rozpadu dla tego preparatu przekształcając (55).

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right) \tag{56}$$

Mając obliczony współczynnik λ możemy wykorzystać go w (55) i obliczyć np. ile czasu zajmie zanim masa preparatu zmieni się od $m_1 = 1\ g$ do $m_2 = 0.8\ g$. Aby obliczyć czas rozpadu należy przekształcić (55) do postaci

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right) \tag{57}$$

6 Zadanie 6 — fale mechaniczne.

Fala o częstotliwości $f = 500\ Hz$ biegnie z szybkością $v = 340\ m/s$. Z jaką różnicą faz drgają punkty odległe o $l = 0.15\ cm$?

6.1 Rozwiązanie zadania 6.

Równanie sinusoidalnej fali biegnącej może mieć postać przedstawioną równaniem (58)

$$U(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{58}$$

Tak więc jeśli punkt x_1 miałby drgania opisane równaniem (59)

$$U(x_1,t) = A\cos(kx_1 - \omega t) \tag{59}$$

a punkt x_2 opisuje (60)

$$U(x_2, t) = A \cos(kx_2 - \omega t) \tag{60}$$

Wiemy, że punkty te są od siebie odległe o l to wtedy $x_2 = x_1 + l$ więc (60) przyjmie postać

$$U(x_2, t) = A \cos(k(x_1 + l) - \omega t) \tag{61}$$

czyli przesunięcie fazowe będzie wynosić

$$\phi = k(x_1 + l) - kx_1 = k(x_1 + l - x_1) = kl \tag{62}$$

Należy wyjaśnić, że k to tzw. *wektor falowy* i powinno go się zapisywać jako $\vec{k}$. Kierunek i zwrot wektora falowego określa kierunek rozchodzenia się fali. W tym zadaniu jest istotna jedynie wartość wektora falowego

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{63}$$

Aby obliczyć przesunięcie fazowe należy znać długość fali λ.

Długość fali jest to odległość jaką przebywa fala w czasie jednego okresu

$$\lambda = v \cdot T \tag{64}$$

Przy czym podana w zadaniu częstotliwość jest odwrotnością okresu $f = \frac{1}{T}$. Wykorzystanie tej zależności w (64) daje

$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{65}$$

Podstawiając (65) do (63) dostajemy

$$k = \frac{2\pi f}{v} \tag{66}$$

Teraz można wykorzystać zależność (66) do obliczenia przesunięcia fazowego z równania (62).

$$\phi = \frac{2\pi f}{v} l \tag{67}$$

Po podstawieniu danych do wyrażenia (67) dostajemy wynik [1]

$$\phi = 0.014$$

[1] Z doświadczenia mam prawo przypuszczać, że układający zadanie chciał aby odległość $l = 0.15\ m$, czyli 15 cm wtedy przesunięcie fazowe ϕ będzie większe.

7 Zadanie 7 — praca i ruch.

Jaką pracę wykona siła $F = At - Bt^2$ działająca na masę $m = 10\ kg$ w czasie od $t_1 = 2\ s$ do $t_2 = 7\ s$. W momencie przyłożenia siły szybkość masy wynosiła $v_0 = 2\ m/s$. $A = 3\ \frac{kg \cdot m}{s^3}$; $B = 2\ \frac{kg \cdot m}{s^4}$

7.1 Rozwiązanie zadania 7.

Praca jest iloczynem skalarnym wektora siły i przesunięcia. W tym zadaniu możemy zaniedbać, że jest to iloczyn dwóch wektorów ponieważ jest to zagadnienie jednowymiarowe.

Jeśli wykonalibyśmy wykres zależności siły od położenia to pole pod krzywą byłoby pracą wykonaną przez tę siłę. Opisuje to całka (68).

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{68}$$

W tym zadaniu zarówno siła, jak i położenie są parametryzowane czasem. Należy więc wypisać całkę (68) wstawiając za siłę F wyrażenie podane w zadaniu i znaleźć postać różniczki dx.

Druga zasada dynamiki mówi, że $F = ma$, co daje się zapisać w postaci

$$a = \frac{F}{m} \tag{69}$$

czyli

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} \tag{70}$$

Całkując obustronnie (70) dostajemy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int F(t)dt \tag{71}$$

Można to zapisać wprost

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int At - Bt^2 dt \tag{72}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\left(\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3}\right) + C$$

C jest stałą całkowania, która w tym zagadnieniu ma wymiar prędkości i jest to, podana w zadaniu, prędkość początkowa v_0.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\left(\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3}\right) + v_0 \tag{73}$$

Postać różniczki dx jest następująca

$$dx = \frac{1}{m}\left[\left(\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{3}\right) + v_0\right] dt \tag{74}$$

Teraz wystarczy zapisać explicite całkę (68) i obliczyć ją.

$$W = \int \left(At - Bt^2\right)\left(\frac{At^2}{2m} - \frac{Bt^3}{3m} + v_0\right) dt \tag{75}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{B^2t^5}{3m} - \frac{5ABt^4}{6m} + \frac{A^2t^3}{2m} - Bv_0t^2 + Av_0t\right) dt \tag{76}$$

$$W = \left(\frac{B^2t^6}{18m} - \frac{5ABt^5}{30m} + \frac{A^2t^4}{8m} - \frac{Bv_0t^3}{3} + \frac{Av_0t^2}{2}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{77}$$

Po podstawieniu dostajemy wynik

$$W =$$

8 Zadanie 8 — gaz w polu grawitacyjnym.

Na wysokości 5 km ciśnienie atmosferyczne jest 2 razy mniejsze jak przy powierzchni planety. Ile razy jest mniejsze na wysokości 10 km?

8.1 Rozwiązanie zadania 8.

Problem postawiony w zadaniu można rozwiązać bardzo szybko, ale najpierw trzeba znać tzw. wzór barometryczny. Poniżej przedstawię jak go wyprowadzić.

8.1.1 Wzór barometryczny.

Rozważmy problem zmiany ciśnienia w gazie wraz z wysokością.[2] Wprowadźmy układ współrzędnych z osią x skierowaną pionowo w górę. Wydzielmy teraz myślowo wewnątrz gazu prostopadłościan o podstawie dS i wysokości dx. Objętość tego "pudełeczka" jest równa $dV = dS \cdot dx$ a masa zawartego w nim gazu równa $dm = \rho\ dV = \rho\ dS\ dx$; ρ jest gęstością gazu.

W równowadze na wybrany prostopadłościan działają trzy siły:

[2] Na podstawie skryptu prof. Jerzego Gintera "Fizyka IV dla Nauczycielskiego Kolegium Fizyki" Warszawa 1996

- na denko dolne, znajdujące się na poziomie x, działa w górę siła $\vec{F}_1$, wywołana panującym tam ciśnieniem $p(x)$. Ma ona wartość

$$F_1 = p(x)dS \tag{78}$$

- na denko górne, znajdujące się na poziomie $x + dx$, działa w dół siła o wartości

$$F_2 = p(x + dx)dS \tag{79}$$

- siła przyciągania ziemskiego, działająca w dół na masę dm

$$F_3 = dm \cdot g = \rho\ g\ dx\ dS \tag{80}$$

  g jest przyspieszeniem ziemskim (na poziomie x).

W warunkach równowagi $F_1 = F_2 + F_3$. Napiszemy tę równość, dzieląc od razu wszystkie trzy człony przez dS:

$$p(x) = p(x + dx) + \rho\ g\ dx \tag{81}$$

czyli

$$p(x + dx) - p(x) = -\rho\ g\ dx \tag{82}$$

albo

$$\frac{p(x + dx) - p(x)}{dx} = -\rho(x)g \tag{83}$$

We wzorze (83) napisaliśmy wprost, że gęstość substancji też może być funkcją x, bo — jak wiemy — jest w ogólności funkcją ciśnienia p. Dla małych dx możemy napisać symbol pochodnej:

$$\frac{dp(x)}{dx} = -g\rho(x) \tag{84}$$

Aby opisać zależność ciśnienia od wysokości w gazach wykorzystamy równanie (84) oraz przyjmiemy następujące założenia:

- przyjmiemy, że temperatura gazu jest stała i równa $0^o C$,

- założymy, że gaz spełnia prawo Boyle'a-Mariotte'a, które zapiszemy w postaci

$$p(x)V(x) = p_0 V_0 \tag{85}$$

  gdzie p_0 jest ciśnieniem na poziomie morza, V_0 jest objętością, jaką zajmuje ustalona masa gazu m na poziomie morza.

Możemy teraz podzielić m przez obie strony (85) i zauważyć, że $m/V = \rho$. Dostajemy wtedy

$$\frac{\rho(x)}{p(x)} = \frac{\rho_0}{p_0} \tag{86}$$

czyli

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{p_0} p(x) \tag{87}$$

Wstawiając wyrażenie (87) do ogólnego równania (84) dostajemy

$$\frac{dp(x)}{dx} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p(x) \tag{88}$$

Jest to dobrze znane równanie, którego rozwiązaniem jest funkcja wykładnicza postaci

$$p(x) = Ae^{-\alpha x} \tag{89}$$

Podstawiając (89) do (88) ustalamy łatwo, że $\alpha = \rho_0 g/p_0$. Stałą A wyznaczamy z warunku, że dla $x = 0$ $p = p_0$. Ostatecznie dostajemy więc

$$p(x) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} \tag{90}$$

8.1.2 Wzór barometryczny — zastosowanie.

$$p(x) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} \tag{91}$$

Zgodnie z treścią zadania

$$\frac{1}{2} p_0 = p_0 e^{-kh_1} \tag{92}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{h_1} \tag{93}$$

$$p(h_2) = p_0 e^{-\frac{\ln(2)}{h_1} h_2} \tag{94}$$

Wiedząc że $h_1 = 5\ km$ a $h_2 = 10\ km$ można wykorzystać fakt, że $h_2 = 2h_1$

$$p(h_2) = p_0 e^{-2\ln(2)} \tag{95}$$

$$p(h_2) = \frac{1}{4} p_0 \tag{96}$$

Ostateczna odpowiedź jest taka, że ciśnienie na wysokości $h_2 = 10\ km$ jest cztery razy mniejsze niż na powierzchni planety.