# Rozwiązania prostych zadań z podstaw fizyki kwantowej.

Jacek Izdebski

6 listopada 2001 roku

# 1 Zadania

## 1.1 Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne

Progowa długość fali dla wybicia fotoelektronów z metalicznego sodu wynosi $5.45 \cdot 10^{-7}\ m$.

a. Wyznacz maksymalną prędkość elektronów wybijanych przez światło o długości fali $2 \cdot 10^{-7}\ m$.

b. Jakie jest napięcie hamujące dla fotoelektronów wybijanych z sodu przez światło o długości fali $2 \cdot 10^{-7}\ m$?

## 1.2 Fale materii

Ile wynosi długość fali przypisana elektronowi o energii $100\ eV$.

## 1.3 Model planetarny atomu według Bohra

Załóż, że model planetarny opisuje ruch elektronu w atomie wodoru. Jeśli promień orbity elektronu wynosi $5.3 \cdot 10^{-11}\ m$ oblicz:

a. Częstość kołową elektronu.

b. Prędkość liniową elektronu.

c. Energię kinetyczną elektronu w $eV$. Jaka jest minimalna energia potrzebna do zjonizowania atomu.

## 1.4 Widmo wodoru

Znajdź długość fali w metrach dla pierwszych trzech linii serii Lymana dla wodoru. W jakim obszarze widma leżą te linie.

## 1.5 Przejście elektronowe

Elektron w atomie wodoru przechodzi ze stanu $n = 5$ do stanu podstawowego $n = 1$. Znajdź energię i pęd emitowanego fotonu.

## 1.6 Model Bohra

W modelu atomu wodoru Bohra orbity $n = 1, 2, 3, \ldots$ są oznaczone literami $K, L, M, \ldots$. Dla elektronów na każdej z orbit $K, L, M$ oblicz:

a. promieniowanie orbit

b. częstość obiegu

c. prędkości liniowe

d. momenty pędu

e. całkowitą energię układu

# 2 Rozwiązania

## 2.1 Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne

Znając progową długość fali na wybicie elektronu możemy obliczyć jaka jest praca wyjścia[1] dla sodu. Pomiędzy długością fali światła a energią fotonu jest związek:

$$E = h\nu$$

gdzie $\nu = \frac{1}{T}$. Długość fali to inaczej odległość jaką pokonuje fala w czasie jednego okresu, więc dla światła $\lambda = cT$. Uwzględniając powyższe $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$W_{wyjścia} = \frac{hc}{\lambda_{graniczna}}$$

Jeśli cała energia padającego fotonu zostanie zurzyta na wybicie elektronu to elektron będzie miał energię

$$E = h\nu - W_{wyjścia}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{graniczna}}$$

Oczywiście $E$ jest energią kinetyczną elektronu więc można napisać

$$\frac{m_e v^2}{2} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{graniczna}}\right)$$

$$v^2 = \frac{2hc}{m_e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{graniczna}}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{graniczna}}\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e}\left(\frac{\lambda_{graniczna} - \lambda}{\lambda\lambda_{graniczna}}\right)}$$

Obliczenie napięcia hamującego też nie jest problemem. Wystarczy energię elektronu w dżulach podzielić przez ładunek elektronu. Po podstawieniu

$$v = 1.18 \cdot 10^6\ m/s$$

$$E = 6.29 \cdot 10^{-19}\ J$$

$$U = 3.93V$$

[1] praca potrzebna do wybicia elektronu z powierzchni metalu

## 2.2 Fale materii

Długość fali cząstki materialnej poruszającej się z prędkością $v$ jest opisana wzorem:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

gdzie $h$ oznacza stałą Plancka (tzw. kwant działania); $m$ masa cząstki. Energia kinetyczna elektronu to

$$E = \frac{m_e v^2}{2}$$

więc

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}}$$

po podstawieniu do zależności na $\lambda$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Em_e}}$$

Energia wstawiana do powyższego wzoru musi być w $J$ więc trzeba dokonać zamiany 100 $eV = 100 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}$ $J$. Po podstawieniu wartości liczbowych dostajemy wynik

$$\lambda = 1.23 \cdot 10^{-10} m$$

## 2.3 Model planetarny atomu według Bohra

Oczywiście trzeba pamiętać, że model Bohra jest błędny i nie oparty na żadnych konkretnych przesłankach fizycznych. W zadaniu każą nam założyć (nie wiem w jakim celu), że atom wodoru jest zbudowany tak jak to opisał Bohr. Wtedy rozważamy ruch elektronu wokół masywnego jądra[2]. Pomiędzy elektronem a protonem występuje kulombowskie oddziaływanie przyciągające

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Jest to jednocześnie siła dośrodkowa w ruchu po okręgu. Jak pamiętamy z lekcji fizyki siła dośrodkowa wyraża się wzorem

$$F_d = \frac{v^2}{r} m$$

[2]Przyjmujemy, i nie jest to wielkim błędem, że środek masy układu jądro elektron znajduje się jądrze. Elektron ma masę $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ $kg$ natomiast proton (stanowiący jądro atomu wodoru) $m_p = 1.676 \cdot 10^{-27}$ $kg$. Jak widać jest to różnica czterech rzędów wielkości.

gdzie $v$ prędkość liniowa ciała poruszającego się po okręgu; $r$ promień okręgu; $m$ masa ciała;

W tym zadaniu siła dośrodkowa wygląda następująco:

$$F_d = \frac{v^2}{r} m_e$$

i jest równa sile oddziaływania elektrostatycznego, więc:

$$\frac{v^2}{r} m_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

i dostajemy prędkość liniową

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e}}$$

Częstość kołową uzyskamy łatwo, gdy zauważymy, że:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

więc

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e}}$$

Obliczenie energii kinetycznej też nie stanowi problemu.

$$\frac{v^2 m_e}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_k = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Aby obliczyć energię jonizacji trzeba znać całkowitą energię elektronu, czyli nie tylko energię kinetyczną, ale i potencjalną. Suma tych energii daje energię całkowitą i dla stanów związanych[3] jest zawsze ujemna.

Energia potencjalna układu proton – elektron wyraża się wzorem

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

[3]Elektron i jądro w atomie tworzą stan związany, podobnie w stanie związanym są Ziemia i Księżyc czy Ziemia i stacja orbitalna. Gdy ludzie wysyłają sondy kosmiczne poza układ słoneczny to nadają im taką energię aby nie tworzyły stanów związanych z innymi planetami.

Energia całkowita wyrazi się sumą

$$E_c = E_p + E_k = E_{jonizacji}$$

$$E_{jonizacji} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

co po sprowadzeniu do wspólnego mianownika daje

$$E_{jonizacji} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Ostatecznie po podstawieniu otrzymujemy wyniki:

$$\omega = 4.12 \cdot 10^{16}\ s^{-1}$$

$$v = 2185993\ m/s$$

$$E_k = 13.6\ eV$$

$$E_{jonizacji} = -13.6\ eV$$

## 2.4 Widmo wodoru

Seria Lymana obejmuje przejścia z powłok wyższych na powłokę pierwszą, czyli gdy $n = 1$, $m = 2, 3, 4, \ldots$ Długość fali można obliczyć ze wzoru Balmera–Rydberga

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

gdzie $R = 10973731.534\ m^{-1}$ oznacza stałą Rydberga.

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy

$$\lambda_{2\to1} = 121.5\ nm$$

$$\lambda_{3\to1} = 102.5\ nm$$

$$\lambda_{4\to1} = 97.2\ nm$$

## 2.5 Przejście elektronowe

Wykorzystując wzór z poprzedniego zadania dostajemy

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R\frac{m^2 - n^2}{n^2 m^2}$$

Wzór na energię jest już znany

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

więc wykorzystując wzór Rydberga

$$E = hcR\frac{m^2 - n^2}{n^2m^2}$$

Pęd obliczymy ze wzoru

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$$

Foton nie ma masy spoczynkowej ($m_0 = 0$) więc jeden człon wyrażenia znika i zostaje tylko

$$E^2 = p^2c^2$$

w ten sposób po przekształceniu otrzymujemy wyrażenie na pęd fotonu

$$p = \frac{E}{c}$$

Podstawiając wcześniejsze związki

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$p = hR\frac{m^2 - n^2}{n^2m^2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

$$E = 13.1eV$$

$$p = 6.98 \cdot 10^{-27}\ m \cdot s^{-1} \cdot kg$$

## 2.6 Model Bohra

a. Podpunkt jest trochę źle sformułowany. Postulat Bohra mówi o tym, że elektrony poruszające się po orbitach nie promieniują energii (inaczej musiałyby spadać na jądro). Fotony są wyświecane wtedy, gdy następuje przejście elektronu z orbity wyższej na niższą. Można więc wykorzystać wzór Rydberga do wyznaczenia długości fal wypromieniowanych przy przejściach:

$$\lambda_{2\to1} = 121.5\ nm$$

$$\lambda_{3\to1} = 102.5\ nm$$

$$\lambda_{3\to2} = 656.1\ nm$$

b. Podobny problem był już omawiany dla tzw. promienia Bohra w zadaniu trzecim. Tutaj należy wyprowadzić wzór bardziej ogólny, który pozwoli obliczyć promień dowolnej orbity Bohrowskiego wodoru. Należy to zrobić w oparciu o postulat mówiący o skwantowaniu momentu pędu elektronu na orbicie.

$$L = n\frac{h}{2\pi}$$

gdzie $L$ jest momentem pędu na orbicie $n$. Dla przypomnienia moment pędu jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego i pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. W przypadku toru będącego okręgiem wartość momentu pędu wyraża się jako $L = mvr$.

Nie będę przeprowadzał całego wywodu dotyczącego wzoru na częstość obiegu (można go znaleźć w podręcznikach do szkoły średniej). Ograniczę się do podania wzoru.

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n^3}}$$

gdzie

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2$$

Po podstawieniu wielkości liczbowych otrzymamy

$$\omega_1 = 4.1 \cdot 10^16 \ s^{-1}$$

$$\omega_2 = 5.1 \cdot 10^15 \ s^{-1}$$

$$\omega_3 = 1.5 \cdot 10^15 \ s^{-1}$$

c. Obliczenie prędkości liniowych polega jedynie na wymnożeniu częstości $\omega$ przez promień

$$v_n = \omega_n r_n$$

$$v_1 = 2175459 \ m/s$$

$$v_2 = 1087729 \ m/s$$

$$v_3 = 725153 \ m/s$$

d.

$$L_n = n\frac{h}{2\pi}$$

$$L_1 = 1.0603 \cdot 10^{-34} \ m^2 \cdot s^{-1} \cdot kg$$

$$L_2 = 2.1206 \cdot 10^{-34} \ m^2 \cdot s^{-1} \cdot kg$$

$$L_3 = 3.1809 \cdot 10^{-34} \ m^2 \cdot s^{-1} \cdot kg$$

e. Całkowita energia układu.

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

$$E_1 = -13.6\ eV$$

$$E_2 = -3.4\ eV$$

$$E_3 = -1.5\ eV$$