1 Treści zadań serii V

1.1 Zadanie I

Dwumetrowy przewodnik, w którym płynie prąd $I = 10\ A$ umieszczono w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = 0.15\ T$. Jaka siła działa na przewodnik jeśli jest on umieszczony:

a) prostopadle do pola $\vec{B}$

b) pod kątem 45^o

c) wzdłuż $\vec{B}$

1.2 Zadanie II

Jaki jest maksymalny moment sił działających na pojedynczą pętlę o polu powierzchni $5\ cm^2$, w której płynie prąd o natężeniu $I = 10\ A$ gdy umieścimy ją w polu magnetycznym o indukcji $B = 0.15\ T$? Ile wyniesie ten moment gdy pentla będzie zawierać $N = 20$ identycznych zwojów?

1.3 Zadanie III

Prostokątna cewka zawierająca 50 zwojów wisi pionowo w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 10^{-2}\ T$ tak, że płaszczyzna zwojów jest równoległa do linii pola B. Przekrój cewki ma wymiary $5\ cm$ (wysokość w pionie) na $2\ cm$ (długość w poziomie). Obliczyć natężenie prądu jaki należy przepuścić przez drut (cewkę) aby obróciła się ona o kąt 30^o jeżeli obrót (skręcenie) drutu o 1^o wymaga momentu siły $10^-9\ N \cdot m$.

1.4 Zadanie IV

Metalowy przewodnik w postaci paska o przekroju $1.2\ cm \times 1.5 \cdot 10^-3\ m$ przewodzi prąd o natężeniu $I = 0.5\ A$. Jeżeli metal zawiera średnio $5 \cdot 10^{22}$ elektronów swobodnych (elektronów przewodnictwa) w cm^3 to jaka jest średnia prędkość ich ruchu (uporządkowanych tak aby wynikłe z tego ruchu natężenie prądu elektrycznego miało wartość jak wyżej, czyli $I = 0.5\ A$). Jakie będzie napięcie Halla jeśli pasek umieścimy w polu $B = 1\ T$ prostopadłym do paska?

1.5 Zadanie V

Cewka galwanometru (z ruchomą cewką) ma 10 zwojów i opór 4 Ω. Taki galwanometr może służyć do pomiaru natężeń prądu jak i napięć. Jeśli tę cewkę wymieniamy na inną posiadającą 100 zwojów i opór 160 Ω, ile razy zmieni się zakres pomiaru

a) natężenia prądu

b) napięcia

1.6 Zadanie VI

Cząstki 1; 2; 3; 4; 5 przechodząc przez pole $\vec{B}$ (skierowane za płaszczyznę rysunku). Patrz rysunek, linie 1; 2; 4; 5 a linia 5 linią prostą. Co możesz powiedzieć o każdej z tych cząstek?

1.7 Zadanie VII

Elektrony płynące ku ekranowi lampy telewizyjnej mają energię kinetyczną $E_k \approx 12\ keV$ Kineskop jest tak ustawiony, że elektrony poruszają się poziomo z południa na północ. Ziemskie pole magnetyczne nie jest dokładnie poziome. Jak wpłynie na ruch elektronów składowa pozioma i pionowa Ziemskiego pola magnetycznego? Jeśli składowa pionowa pola ma wartość $5.5 \cdot 10^{-5}\ T$ i zwrot ku dołowi, to:

a) w jakim kierunku będzie odchylany strumień

b) o ile odchyli sie strumień (od prostoliniowego toru) po przebyciu 20 cm drogi w lampie.

1.8 Zadanie VIII

Drut o długości 60 cm i masie $m = 10\ g$ jest zawieszony na dwóch przewodzących sprężynach w polu magnetycznym o indukcji 0.40 T Jaka powinna być wielkość i kierunek prądu by siła elektrodynamiczna zrównoważyła ciężar (tak by sprężyny nie były ani napięte ani ściągnięte)?

2 Treści zadań serii VII

2.1 Zadanie I

W obwodzie przedstawionym na rysunku działa zmienna siła elektromotoryczna o częstości kołowej ω. Znaleźć natężenie prądu I, I_C i I_R oraz ich względne przesunięcia fazowe.

2.2 Zadanie II

Znaleźć impedancję obwodu przedstawionego na rysunku oraz przesunięcie fazowe między prądem I a siłą elektromotoryczną ε. Jak należy dobrać parametry układu aby impedancja nie zależała od ω?

2.3 Zadanie III

W obwodzie przedstawionym na rysunku znaleźć natężenie prądu oraz przesunięcie fazowe. Znaleźć amplitudę natężenia prądu I_0 gdy $\omega^2 = 1/LC$.

2.4 Zadanie IV

W pewnym obwodzie wykres natężenia prądu I i napięcia U jest następujący

a) ile wynosi przesunięcie fazowe

b) jaka jest średnia moc wydzielona w tym obwodzie

2.5 Zadanie V

Przez żarówkę włączoną do obwodu przedstawionego na rysunku i zawierającego transformator powinien płynąć prąd o natężeniu skutecznym $I_{sk} = 3\ A$. Przy jakiej przekładni transformatora $\frac{n_1}{n_2}$ będzie to możliwe jeśli moc żarówki jest $36\ W$. (n_1, n_2 liczby zwojów w transformatorze)

2.6 Zadanie VI

W obwodzie przedstawionym na rysunku wartości napięcia na indukcyjności i pojemności są równe. Jakie jest skuteczne natężenie prądu i przesunięcie fazowe gdy $R = 100\ \Omega$; $C = 1\ \mu F$; $L = 1\ H$. Jaka jest częstość kołowa w $\cdots$.

3 Rozwiązania zadań z serii V

3.1 Rozwiązanie zadania I

W tym zadaniu trzeba wykorzystać popularny wzór na siłę działającą na przewodnik z prądem w polu magnetycznym. Wyprowadzenie tej zależności można znaleźć w wielu podręcznikach fizyki np w ...

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \tag{1}$$

znak $\times$ oznacza iloczyn wektorowy więc gdy linie pola B są prostopadłe do przewodnika wtedy równanie 1 przybiera postać

$$F = IlB \tag{2}$$

ponieważ

$$|\vec{F}| = I|\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \sin(\angle lB) \tag{3}$$

po podstawieniu otrzymujemy $F = 3\ N$. Gdy kąt wynosi 45^o wtedy $\sin(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ więc wtedy $F = 2.12\ N$. Dla kąta 0^o, jak łatwo obliczyć $F = 0$ ponieważ $\sin(0^o) = 0$.

3.2 Rozwiązanie zadania II

Podstawą do rozwiązania jest tu wzór opisujący moment siły działający na ramkę z prądem. Wzór ten ma postać następującą:

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} \tag{4}$$

gdzie wektor $\vec{S}$ określa powierzchnię ramki z prądem. Może się wydać dziwnym opisywanie powierzchni przy pomocy wektora, ale jest to niezwykle użyteczne. Długość wektora $\vec{S}$ odpowiada polu powierzchni opisywanej przez ten wektor a kierunek jest do tej powierzchni prostopadły. Zwrot wektora $\vec{S}$ określa stronę powierzchni.[1] Wzór 4 jest prawdziwy dla każdego płaskiego obwodu niezależnie od kształtu powierzchni. Gdy, tak jak w tym zadaniu, jednakowych zwojów jest więcej wtedy należy uwzględnić ilość zwojów we wzorze 4 co prowadzi do zależności:

$$\vec{M} = NI\vec{S} \times \vec{B} \tag{5}$$

gdzie N oznacza ilość zwojów. Po podstawieniu danych otrzymujemy wynik $M = 7.5 \cdot 10^{-4}\ N \cdot m$ dla pojedynczej pentli i $M_{20} = 1.5 \cdot 10^{-2}\ N \cdot m$.

[1] Można wtedy mówić o tzw. powierzchni zorientowanej. Nie wszędzie można jednak łatwo określić zwrot tego wektora. Przykładem może być dobrze znana matematykom wstęga Mobiusa, ale my nie będziemy się zajmować tym problemem.

3.3 Rozwiązanie zadania III

Ramka obróci się do takiej pozycji, w której zajdzie równowaga pomiędzy momentem sił związnych ze skręcaniem drutu, na którym wisi ramka, a momentem sił pochodzących od sił działających na ramkę na skutek istnienia pola B. Można to zapisać wzorem:

$$z\alpha = NIabB\sin(90^o - \alpha) \tag{6}$$

Gdy nastąpi obrót o α należy pamiętać że kąt pomiędzy wektorami $\vec{S}$ i $\vec{B}$ będzie wynosił $90^o - \alpha$. Można więc napisać zamiast $\sin(90^o - \alpha) = \cos(\alpha)$. Teraz równanie 6 będzie wyglądało tak:

$$z\alpha = NIabB\cos(\alpha) \tag{7}$$

co daje

$$I = \frac{z\alpha}{NabB\cos(\alpha)} \tag{8}$$

W tym zadaniu

$$z = 10^{-9}\ \frac{Nm}{1^o}$$
$$\alpha = 30^o$$
$$N = 50$$
$$B = 10^{-2}\ T$$
$$a = 5\ cm$$
$$b = 2\ cm$$

co po podstawieniu daje wynik $I = 69.3\ \mu A$.

3.4 Rozwiązanie zadania IV

Obliczenie średniej prędkości nie powinno nastręczać wielkiej trudności. Z definicji wiadomo, że natężenie prądu to ilość ładunku jaki przepłynął przez poprzeczny przekrój przewodnika w jednostce czasu.

$$I = \frac{Q}{t} \tag{9}$$

wiemy też, jaki prąd płynie przez metalowy pasek i znając ładunek jednego elektronu możemy obliczyć ile elektronów przepływa przez poprzeczny przekrój przewodnika w czasie jednej sekundy.

$$N = \frac{It}{\overline{e}} \tag{10}$$

Teraz trzeba obliczyć w jakiej objętości mieści się ta ilość elektronów. W zadaniu jest podana wartość koncentracji elektronów, którą będziemy oznaczać jako n. Wystarczy więc podzielić ilość elektronów przez ich koncentrację i dostaniemy objętość w jakiej zawiera się ta ilość.

$$V = \frac{N}{n} \tag{11}$$

Z drugiej strony

$$V = x \cdot a \cdot b \tag{12}$$

gdzie a i b to grubość i szerokość paska a wartość x będziemy chcieli obliczyć. Łącząc równania (10) (11) (12) dostajemy po prostych przekształceniach

$$v = \frac{x}{t} = \frac{I}{\overline{e}nab} \tag{13}$$

gdzie v oznacza średnią prędkość elektronów w płytce metalu. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $3.47 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s}$.
Jeśli chodzi o wartość tzw. napięcia Hallowskiego to można je obliczyć następująco. Poruszające się ze średnią prędkością v elektrony poruszają się w skierowanym prostopadle do ich prędkości polu magnetycznym. Pole to powoduje powstanie siły

$$\vec{F} = \overline{e}\vec{v} \times \vec{B} \tag{14}$$

Siła ta przesuwa elektrony na jedną stronę paska wytwarzając w ten sposób różnicę potencjałów pomiędzy jedną krawędzią paska a drugą. Elektrony nie gromadzą się na jednej stronie w nieskończoność ale tylko do momentu aż siła wyrażona zależnością (14) zostanie zrównoważona przez siłę Coulombowską wytworzoną przez elektrony zgromadzone na krawędzi paska. Można ten warunek równowagi zapisać jako

$$E\overline{e} = \overline{e}vB \tag{15}$$

dzieląc stronami dostajemy

$$E = vB \tag{16}$$

Pomiędzy przeciwległymi krawędziami paska powstaje jednorodne pole elektryczne, więc całkując (16) po położeniu wzdłuż szerokości paska otrzymujemy

$$U = vBa \tag{17}$$

Prędkość v została obliczona w (13) i łącząc tą zależność z (17) dostajemy

$$U = \frac{IB}{\overline{e}nb} \tag{18}$$

Równanie (18) pozwala obliczyć tzw. napięcie Hallowskie, gdzie I jest prądem płynącym przez próbkę (pasek); B to pole magnetyczne w jakim znajduje się próbka; $\bar{e}$ to ładunek elektronu; n jest koncentracją nośników w próbce (elektronów); b to grubość próbki.
Po podstawieniu danych otrzymujemy $U = 42\ nV$.

3.5 Rozwiązanie zadania V

Aby rozwiązać to zadanie trzeba poczynić wstępne założenia. Przyjmiemy, że ramki różnią się jedynie ilością zwojów a nie polem przekroju oraz, że system zawieszenia ramki nie uległ zmianie, tzn. że aby wychylić maksymalnie wskazówkę trzeba użyć takiego samego momentu siły w jednym i drugim przypadku. Z tymi założeniami można rozwiązać to zadanie.
Jeśli przy ramce zawierającej $n_1 = 10$ zwojów pełne wychylenie następowało przy prądzie I_1 to dla $n_2 = 100$ pełne wychylenie będzie już przy prądzie $I_2 = 0.1I_1$. Wynika to ze wzoru (4) na moment siły. Z prawa Ohma można obliczyć jakie zakresy napięć będą mierzyć galwanometry.

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 \tag{19}$$

oraz

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 0.1I_1 \cdot 40R_1 = 4U_1 \tag{20}$$

Czyli zakres pomiaru napięć wzrośnie czterokrotnie a zakres pomiaru natężenia zmaleje 10 razy.

3.6 Rozwiązanie zadania VI

Tor oznaczony numerem 3 (prosta) jest z pewnością torem cząstki o zerowym ładunku elektrycznym.
Jeśli chodzi o pozostałe tory to mogę powiedzieć tylko tyle, że dla torów o mniejszym promieniu iloczyn wartości prędkości ładunku i ładunku jest większy. O znakach ładunków nie można nic powiedzieć ponieważ nie został na rysunku określony kierunek ruchu tych cząstek.

3.7 Rozwiązanie zadania VII

Składowa pozioma pola magnetycznego nie ma wpływu na ruch elektronów. Składowa pionowa będzie natomiast, zgodnie ze wzorem (14) elektrony będą odchylane na wschód (ze względu na ujemny ładunek elektronu).
Aby obliczyć odległość x, która określi o ile nastąpiło odchylenie wiązki, należy najpierw policzyć długość promienia R a następnie przekształcając

równanie okręgu $X^2 + Y^2 = R^2$ obliczyć dla jakiego X wartość Y jest równa l. Z racji że tak naprawdę interesuje nas tylko jedna ćwiartka okręgu to możemy sobie pozwolić na następujące przekształcenia równania okręgu.

$$X = \sqrt{R^2 - l^2} \tag{21}$$

Aby obliczyć x trzeba teraz od R odjąć obliczoną wartość X co daje ostatecznie

$$x = R - \sqrt{R^2 - l^2} \tag{22}$$

Promień okręgu można wyznaczyć porównując wyrażenie na siłę dośrodkową z siłą działającą na ładunek poruszający się w polu magnetycznym.

$$\frac{v^2 m_e}{R} = \overline{e} v B \tag{23}$$

$$\frac{v m_e}{R} = \overline{e} B$$

$$R = \frac{v m_e}{\overline{e} B} \tag{24}$$

Łącząc (22) z (24) otrzymujemy

$$x = \frac{v m_e}{\overline{e} B} - \sqrt{\left(\frac{v m_e}{\overline{e} B}\right)^2 - l^2} \tag{25}$$

Nie znamy jeszcze prędkości z jaką poruszają się elektrony, ale można ją wyznaczyć znając energię kinetyczną.

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} \tag{26}$$

wtedy $v = 6.49 \cdot !0^7$ m/s. Nie jest to jednak ścisłe rozwiązanie ponieważ nie uwzględnia efektów relatywistycznych (ale nawet przy tych prędkościach nie będzie to miało znaczącego wpływu na wynik).

Znając już prędkość możemy obliczyć długość szukanego odcinka x podstawiając dane do (25).

$$x = \frac{\sqrt{2E_k m_e}}{\overline{e} B} - \sqrt{2E_k \frac{m_e}{(\overline{e} B)^2} - l^2} \tag{27}$$

Po podstawieniu otrzymamy wynik, szukane przesunięcie wynosi $x \approx 3 \cdot 10^{-3}$ m.

3.8 Rozwiązanie zadania VIII

Aby sprężyny nie były rozciągnięte ani ściśnięte siła ciężkości działająca na pręt musi się równoważyć z siłą Lorentza.

$$mg = IlB \tag{28}$$

co daje po przekształceniach

$$I = \frac{mg}{Bl} \tag{29}$$

a po podstawieniu

$$I \approx 0.41\ A$$

Aby spełniony był warunek postawiony w zadaniu prąd musi płynąć (zgodnie z rysunkiem) "w prawo".

4 Rozwiązanie zadań z serii VI

4.1 Rozwiązanie zadania I

Aby obliczyć pole magnetyczne wokół przewodnika z prądem (prostoliniowego i nieskończonego) trzeba wykorzystać prawo Ampera (30)

$$\int \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I \tag{30}$$

Całka po prawej stronie jest całką po drodze zamkniętej (tzw. całka okrężna). W naszym przypadku najlepiej będzie wybrać do całkowania okrąg (ze względu na symetrię zagadnienia). Jeśli drogą po jakiej będziemy całkować jest okrąg to krążenie wektora $\vec{B}$ wyrażone całką będzie miało postać $2\pi rB$.

$$2\pi rB = \mu_0 I \tag{31}$$

Z tego równania można obliczyć B

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{32}$$

Po podstawieniu danych otrzymamy wynik liczbowy $B \approx 2 \cdot 10^{-4}\ T$. Gdy przekształcimy wzór będziemy mogli obliczyć odległość w której pole pochodzące od przewodnika znosi się z polem magnetycznym pochodzącym od Ziemi.

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} \tag{33}$$

Po podstawieniu za B pola magnetycznego Ziemi i obliczeniu otrzymamy $r = 10\ cm$.

4.2 Rozwiązanie zadania II

Wykorzystując wyniki rozważań z poprzedniego zadania możemy napisać wzór na pole wytworzone w odległości r od długiego przewodu, będzie to wzór identyczny z (32).

W drugim podpunkcie trzeba obliczyć siłę działającą na krótki przewodnik z prądem. W prosty sposób obliczymy ją ze wzoru $F = I\vec{l} \times \vec{B}$. W tym zadaniu pole magnetyczne jest skierowane prostopadle do przewodnika więc wzór przybierze prostrzą postać $F = IlB$. Podstawiając do wyrażenia na siłę (32).

$$F = I_k l \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{34}$$

gdzie I_k jest prądem płynącym przez krótki przewód. Gdy podstawimy dane liczbowe to uzyskamy $B \approx 8 \cdot 10^{-6}\ T$
oraz $F \approx 1.2 \cdot 10^{-6}\ N$.

4.3 Rozwiązanie zadania III

$$I = \frac{U}{R} \tag{35}$$

$$R = lR_w \tag{36}$$

$$F = BIl \tag{37}$$

$$F = g\rho l \tag{38}$$

łącząc (37) i (38) po przekształceniach można otrzymać warunek na I

$$I = \frac{g\rho}{B} \tag{39}$$

korzystając z (35) i (36) można otrzymać

$$U = IlR_w \tag{40}$$

Wstawiając I z (39) otrzymujemy

$$U = \frac{g\rho}{B} lR_w \tag{41}$$

Po podstawieniu i obliczeniu otrzymujemy wynik $U = 3.7 \cdot 10^{-3}\ V$.

4.4 Rozwiązanie zadania IV

Na trzeci przewodnik nie będzie działała siła w miejscu gdzie pola pochodzące od przewodników odejmą się. Może to mieć miejsce jedynie pomiędzy dwoma przewodnikami. Wystarczy tylko ułożyć i rozwiązać równania.

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \tag{42}$$

przy czym chcemy aby

$$r = r_1 + r_2 \tag{43}$$

Z równań (42) i (43) możemy wyznaczyć np r_1, czyli odległość od pierwszego przewodnika.

$$r_1 = \frac{r I_1}{I_1 + I_2} \tag{44}$$

Co daje wynik $r_1 = 6\ cm$.

4.5 Rozwiązanie zadania V

W zadaniu tym jedna dana jest nadmiarowa (promień cewki). Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu (cewki) wyznacza się prostym wzorem

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l} \tag{45}$$

Wynik końcowy wynosi $B = 6.28 \cdot 10^{-3}\ T$.

4.6 Rozwiązanie zadania VI

Elektrony w metalowym krążku będą spychane na zewnątrz (lub do środka, w zależności od kierunku obrotów lub kierunku pola) póki siła związana z polem magnetycznym $F = qvB$ zrówna się z siłą odpychania elektrostatycznego $F = qE$.

$$Eq = qvB \tag{46}$$

ale

$$v(r) = \frac{2\pi r}{T} = \omega r \tag{47}$$

więc

$$E(r) = \omega r B \tag{48}$$

Potencjał (różnica potencjałów) jest całką z powyższego wyrażenia po promieniu.

$$U = \int_0^R E(r) dr = \int_0^R \omega r B\ dr \tag{49}$$

$$U = \frac{\omega B R^2}{2} \tag{50}$$

więc

$$\omega = \frac{2U}{BR^2} \tag{51}$$

Co liczbowo daje $\omega \approx 1111\ s^{-1}$.

4.7 Rozwiązanie zadania VII

Gdy obracamy ramkę w polu magnetycznym z prędkością kątową ω to powodujemy zmianę strumienia pola magnetycznego Φ_B przez tą ramkę. Zmiana strumienia powoduje powstanie siły elektromotorycznej.

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \epsilon \tag{52}$$

Strumień można zapisać wprost jako

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos(\alpha) \tag{53}$$

Jeśli ramka obraca się ze stałą prędkością kątową to $\alpha = \omega t$, więc

$$\Phi_B = BS\cos(\omega t) \tag{54}$$

Rozwiązując proste równanie różniczkowe (52) dostajemy wyrażenie na ϵ

$$\epsilon = NBS\omega\sin(\omega t) \tag{55}$$

W wyrażeniu jest dodatkowo czynnik N ponieważ jeśli ramka ma N zwojów wtedy strumień przez jej powierzchnię jest N razy większy.
Z definicji prądu elektrycznego wynika

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{56}$$

a z prawa Ohma można zapisać

$$I = \frac{\epsilon}{R} \tag{57}$$

Łącząc (56) i (5.1) otrzymamy

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\epsilon}{R} \tag{58}$$

$$Q = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{NBS\omega}{R}\sin(\omega t)\ dt \tag{59}$$

Po obliczeniu całki

$$Q = \frac{2NBS}{R} \tag{60}$$

i po podstawieniu otrzymamy $Q = 10^{-4}\ C$.

4.8 Rozwiązanie zadania VIII

Zadanie podobne do zadania VI. Trzeba porównać siły

$$Eq = qvB \tag{61}$$

Tyle, że tu nie ma podanej wartości B wprost i trzeba ją obliczyć z danych podanych w zadaniu. Wartość pionowej składowej B można obliczyć z trygonometrii.

$$\mathrm{tg}(71,6^o) = \frac{B}{1.6 \cdot 10^{-5}\ T} \tag{62}$$

więc $B = 4.8 \cdot 10^{-5}\ T$

$$E = vB$$
$$U = \int_0^l vB\ dx$$
$$U = vBl \tag{63}$$

Różnica potencjałów pomiędzy krańcami skrzydeł wynosi $U = 0.53\ V$.

4.9 Rozwiązanie zadania IX

Indukcja własna określa związek pomiędzy strumieniem pola B przechodzącego przez pętlę z przewodnika a prądem płynącym przez ten przewodnik.

$$\Phi_B = LI \tag{64}$$

Indukcja wzajemna jest pojęciem podobnym tylko opisuje zwiazek pomiędzy strumieniem pola B przez inny, osobny obwód a prądem płynącym w obwodzie, który to pole B wytwarza.

$$\Phi_2 = MI_1 \tag{65}$$

Przekształcając (64) i podstawiajac wprost strumień pola B otrzymamy

$$L = \frac{NBS}{I} \tag{66}$$

a indukcja wzajemna wyrazi się jako

$$M = \frac{N_{cewki}BS_{cewki}}{I} \tag{67}$$

Gdy podstawimy dane liczbowe to otrzymamy

$$L = 5 \cdot 10^{-3}\ H$$

$$M = 10^{-6}\ H$$

5 Rozwiązania zadań z serii VII

5.1 Rozwiązanie zadania I

Prąd i napięcie zmienne dobrze jest opisywać liczbami zespolonymi ze względu na występujące w tych obwodach przesunięcia fazowe pomiędzy napięciem i natężeniem. Moduły tych liczb opisują amplitudy, a argumenty fazy prądów i napięć. Stosujemy tutaj uogólnione prawo Ohma:

$$\hat{U} = \hat{I} \cdot \hat{Z}$$

Odpowiednikiem oporu elektrycznego jest tutaj tzw. impedancja. Jest to wielkość zespolona. Impedancję podlegają sumowaniu podobnie jak oporniki.

Impedancja	Element
$\hat{Z}_R = R$	opornik
$\hat{Z}_L = i\omega L$	cewka indukcyjna
$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$	kondensator

W tym zadaniu możemy wypisać następujące związki:

$$\hat{I} = \hat{I}_C + \hat{I}_R \tag{68}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} \tag{69}$$

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_R}{\hat{Z}_R} \tag{70}$$

gdzie

$$\hat{U}_R = \hat{U} - \hat{I}\hat{Z}_r + \hat{I}\hat{Z}_L \tag{71}$$

podstawiając (71) do (70) dostajemy

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U} - \hat{I}\hat{Z}_r + \hat{I}\hat{Z}_L}{\hat{Z}_R} \tag{72}$$

wykorzysując dodatkowo (5.1) otrzymamy

$$\hat{I}_R = \hat{U}\frac{1 - \hat{Z}_r/\hat{Z} + \hat{Z}_L/\hat{Z}}{\hat{Z}_R} \tag{73}$$

z (68) obliczamy

$$\hat{I}_C = \hat{U}\left(\frac{1}{\hat{Z}} - \frac{1 - \hat{Z}_r/\hat{Z} + \hat{Z}_L/\hat{Z}}{\hat{Z}_R}\right) \tag{74}$$

Impedancję $\hat{Z}$ można obliczyć następująco:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_r + \hat{Z}_L + \frac{\hat{Z}_R \cdot \hat{Z}_C}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_C} \tag{75}$$

Po podstawieniu i przekształceniach otrzymujemy:

$$\hat{Z} = r + i\omega L + \frac{R}{i\omega C(R + 1/i\omega C)} \tag{76}$$

W tym momencie mamy już praktycznie obliczone (od strony fizycznej) I, I_R, I_C

$$\boxed{\begin{gathered} \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} \\[2em] \hat{I}_R = \hat{U}\frac{1 - \hat{Z}_r/\hat{Z} + \hat{Z}_L/\hat{Z}}{\hat{Z}_R} \\[2em] \hat{I}_C = \hat{U}\left(\frac{1}{\hat{Z}} - \frac{1 - \hat{Z}_r/\hat{Z} + \hat{Z}_L/\hat{Z}}{\hat{Z}_R}\right) \end{gathered}}$$

Wyprowadzenie wzorów końcowych jest bardzo czasochłonne i łatwo popełnić błąd w obliczeniach. Jak się tego typu zadania oblicza do końca pokażę w zadaniu VI z tej serii.

Jeśli chodzi o względne przesunięcia to należy obliczyć fazy ϕ dla każdej z liczb $\hat{I}$, $\hat{I}_R$, $\hat{I}_C$ a następnie znając te fazy obliczyćwzględne przesunięcia pomiędzy $\hat{I}$, $\hat{I}_R$, $\hat{I}_C$.

5.2 Rozwiązanie zadania II

To zadanie robi się wg. takiego samego schematu co poprzednie. Trzeba zacząć od obliczenia impedancji obwodu.

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_R \cdot \hat{Z}_L}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_L} + \frac{\hat{Z}_R \cdot \hat{Z}_C}{\hat{Z}_R + \hat{Z}_C} \tag{77}$$

co zapisane jawnie daje

$$\hat{Z} = \frac{R \cdot i\omega L}{R + i\omega L} + \frac{R}{i\omega C(R + 1/i\omega C)} \tag{78}$$

Aby obliczyć przesunięcie pomiędzy I i ϵ należy sprowadzić impedancję $\hat{Z}$ do postaci $a + ib$ a następnie wyznaczyć tangens kąta przesunięcia ϕ.

$$\mathrm{tg}(\phi) = \frac{b}{a}$$

sam kąt ϕ można więc obliczyć wykorzystując funkcję odwrotną, czyli

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Jeśli chodzi o odpowiedź na pytanie "jak należy dobrać parametry układu abyimpedancja nie zależała od częstości ω" to można ją wydedukować w sposób następujący.
Jeśli przyjrzymy się jak wyglądają wzory na impedancję cewki i kondensatora to łatwo będzie zauważyć, że tzw. opór indukcyjny rośnie ze wzrostem częstości w sposób liniowy (czyli proporcjonalnie). Inaczej jest w przypadku oporu pojemnościowego, ten maleje ze wzrostem częstości (czyli odwrotnie proporcjonalnie).

5.3 Rozwiązanie zadania III

Aby obliczyć natężenie prądu $\hat{I}$ należy obliczyć impedancję obwodu $\hat{Z}$a następnie podzielić napięcie $\hat{U}$ przez obliczoną impedancję $\hat{Z}$.

$$\frac{1}{\hat{Z}} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L + R} \tag{79}$$

$$\hat{Z} = \frac{i\omega L + R}{-\omega^2 LC + i\omega RC + 1} \tag{80}$$

$$\hat{I} = \hat{U}\frac{-\omega^2 LC + i\omega RC + 1}{i\omega L + R} \tag{81}$$

Przesunięcie fazowe można obliczyć tak jak to zostało opisane w zadaniu II

5.4 Rozwiązanie zadania IV

Przesunięcie fazowe można odczytać z wykresu, wynosi ono $\phi = T/4$. Natomiast średnią moc można obliczyć.

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) \tag{82}$$

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t - \frac{T}{4}) \tag{83}$$

To samo można zapisać w ten sposób

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) \tag{84}$$

$$U(t) = -U_0 \cos(\omega t) \tag{85}$$

Znalezienie mocy chwilowej wydzielanej w tym obwodzie nie jest niczym trudnym wystarczy pomnożyć napięcie i natężenie.

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) \tag{86}$$

$$P(t) = -\frac{1}{2} I_0 U_0 \sin(2\omega t) \tag{87}$$

Jeśli teraz wykonamy całkowanie po połowie okresu funkcji $P(t)$ to otrzymamy całkowitą energię wydzieloną w tym czasie[1]

$$W = -\frac{1}{2} I_0 U_0 \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(2\omega t) dt \tag{88}$$

Po obliczeniu tej całki mamy

$$W = -\frac{I_0 U_0}{2\omega} \tag{89}$$

czyli

$$|W| = \frac{I_0 U_0}{2\omega} \tag{90}$$

Aby uzyskać teraz średnią moc wydzielaną w obwodzie należy podzielić obliczoną pracę (wydzielone ciepło w obwodzie) przez czas w jakim to ciepło się wydzieliło (czyli przez $\frac{T}{4}$). Oto wynik tego dzielenia:

$$\overline{P} = \frac{I_0 U_0}{\pi} \tag{91}$$

Po podstawieniu dostajemy wynik $\overline{P} = 63.66\ W$.

5.5 Rozwiązanie zadania V

Znamy moc wydzieloną na wyjściu transformatora $P = 36\ W$. Wiadomo też że przez żarówkę ma płynąć prąd $I_{skWy} = 3\ A$ można więc obliczyć U_{skWy} przekształcając

$$P = U \cdot I \tag{92}$$

[1] Całkowanie należy wykonać po połowie okresu, gdyż całka po całym okresie dała by tu zero. Warto też pamiętać, że interesuje nas tylko wartość bezwzględna tej całki.

$$U_{skWy} = \frac{P}{I_{skWy}} \tag{93}$$

Znając napięcie skuteczne na wyjściu transformatora oraz napięcie skuteczne wejściowe możemy obliczyć tzw. przekładnię kondensatora

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{U_{skWy}}{U_{skWe}} \tag{94}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{P}{I_{skWy}U_{skWe}} \tag{95}$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{12}{220} \tag{96}$$

5.6 Rozwiązanie zadania VI

Spróbójmy określić czym jest natężenie skuteczne.
Warto się zastanowić nad tym jakie musiałoby być natężenie prądu stałego aby na oporze R w ciągu czasu czasu T wydzieliła się ta sama moc co wtedy, gdy przez opornik płynie prąd zmienny o częstości ω.

$$P = U \cdot I \tag{97}$$

$$P = I^2 R \tag{98}$$

$$P = RI_0^2 \sin^2(\omega t) \tag{99}$$

całkując obie strony po dt dostajemy

$$W_{\frac{1}{4}} = RI_0^2 \int_0^{\frac{T}{4}} \sin^2(\omega t) dt \tag{100}$$

Taką całkę łatwo rozwiązać graficznie (i jest to ogólnie przyjęte). Wynik jaki dostaniemy wynosi

$$W_{\frac{1}{4}} = RI_0^2 \frac{T}{8} \tag{101}$$

wyrażenie (101) opisuje moc wydzieloną w $\frac{1}{4}$ okresu więc w ciągu całego okresu wydzieli się moc opisana wyrażeniem

$$W = \frac{1}{2} RI_0^2 T \tag{102}$$

więc gdy porównamy moc prądu zmiennego z mocą prądu stałego dostaniemy:

$$RI_{sk}^2 = \frac{1}{2} RI_0^2 \tag{103}$$

więc

$$I_{sk} = I_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{104}$$

Aby obliczyć skuteczne natężenie I_{sk} należy znać amplitudę prądu zmiennego I_0. Obliczymy ją następująco:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} \tag{105}$$

impedancję obliczymy łatwo

$$\hat{Z} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \tag{106}$$

po przekształceniach daje to

$$\hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{107}$$

W zadaniu jest powiedziane, że spadek napięcia na cewce i kondensatorze jest taki sam, więc oznacza to że tzw. opór indukcyjny i opór pojemnościowy[1] muszą być sobie równe

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \tag{108}$$

równanie (108) jest spełnione gdy

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \tag{109}$$

Z równania (108) wynika, że urojona część impedancji (107) jest zerowa, więc dla częstości (109) oporność układu jest równa R a przesunięcia pomiędzy napięciem i natężeniem nie ma.
Z prawa Ohma wynika, że dla tego układu przy częstości o której mowa wcześniej prawdą jest

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \tag{110}$$

lub operując napięciem skutecznym, które jest podane w zadaniu

$$I_{sk} = \frac{U_{sk}}{R} \tag{111}$$

Ostatecznie po podstawieniu danych liczbowych:
$I_{sk} = 2.2\ A$; $\phi = 0$; $\omega = 1000\ s^{-1}$

[1] Tak nazywa się moduły impedancji cewki i kondensatora.